ANUL XXVI. MARTIE 1946 No. 1.

BIBLIOTECA CENTRALĂ ... SIBIIU

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 500 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 4000 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRĂINĂTATE ESTE DE 10.000 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **GH. BUICLIU:** O NOUA ANIVERSARE.
2. **ILIE CONSTANTINESCU:** UN SFERT DE VEAC DE APARITIE.
3. **V. ALACI:** 25 ANI DE EXISTENTA.
4. **V. ALACI:** FUNCTII TRIGONOMETRICE INVERSE CU ACEIASI DERIVATA (URMARE).
5. NOTE MATEMATICE 1, 2
6. BIBLIOGRAFIE.
7. PROBLEME REZOLVATE: 1662, 1723, 1874, 1915, 2335.
8. PROBLEME PROPUSE: 2402 - 2409.
9. TABLA DE MATERII.
10. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timișoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931.

38679.

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXVI al „REVISTEI MATEMATICE DIN TIMIŞOARA" este de 4000 (patru mii) lei.

Revista mulţumeşte călduros GAZETEI MATEMATICE pentru felicitările trimise, î-i doreşte activitate sporită şi strălucită.

„R. M. T." adresează vii mulţumiri la toţi *colaboratorii* şi *corespondenţii* ei, pentru felicitările trimise cu prilejul sărbătorii de 25 ani.

„R. M. T." mulţumeşte călduros distinşilor profesori EUGEN VIŞA şi CORNELIU POPESCU membrii în Comitet pentru contribuţia de 20.000 lei a fiecăruia.

Anunţăm cu plăcere că începând de la 15 Martie 1946, mai face parte dintre membrii „REVISTEI MATEMATICE DIN TIMIŞOARA" şi D-l N. N. ANIŢESCU, profesor de matematici la liceul din Tg-Jiu, care a fost un harnic şi apreciat corespondent

Incepând de la 15 Decemvrie 1946, D-nul Profesor M. GHERMĂNESCU ne-a anunţat că se consideră retras din Comitetul „R. M. T."

Rugăm pe corespondenţii noştri a ne trimite din timp abonamentul pentru anul XXVI, al „R. M. T." care începe la 15 Martie 1946, de oarece numărul exemplarelor este redus.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale, vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Politehnica Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Politehnica Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Politehnica Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXV, de 5000 (cinci mii) lei.

Anul I, epuizat. Anii: II—XXIV inclusiv, broşate, 5000 lei fiecare.

ANUL XXVI — No. 1. TIMISOARA, MARTIE 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 500 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 4000 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Politehnica Timișoara.

O NOUĂ ANIVERSARE

de

GH. BUICLIU

Anul acesta școlar marchează pe ecranul lui două aniversări de seamă în ogorul publicațiilor de matematici. La 15 Septembrie 1945 s'au împlinit 50 ani de apariție continuă și regulată a revistei Gazeta Matematică. *Evenimentul, căci acesta este un eveniment în publicistica de specialitate românească, a fost sărbătorit în mod deosebit de Soc.* Gazeta Matematică *și de toată lumea matematică românească.*

La interval de numai câteva luni, azi 15 Martie 1946, un alt eveniment asemănător merită să fie subliniat și sărbătorit în chip deosebit. Acest alt eveniment este împlinirea a 25 ani de apariție continuă *și* regulată *a publicației* „Revista Matematică din Timișoara".

Spre deosebire de Gazeta Matematică *care și-a sprijinit activitatea pe patru stâlpi: Profesorul Inginer* I. Ionescu *și regretații Inginer* Vasile Cristescu, Ing. Andrei Gh. Ioachimescu *și* Profesorul Gheorghe Țițeica, *aniversata de azi,* Revista Matematică din Timișoara, *își reazămă întreaga sa existență de 25 ani pe un singur stâlp,* Dl. Prof. Valeriu Alaci. *A vorbi de* Revista Matematică din Timișoara *în această zi de aniversare înseamnă a vorbi de Dl. Profesor* V. Alaci *și tare mă tem că D-sa nu ar îngădui-o, deaceea mă mărginesc să scriu istoricul începuturilor revistei, reeditând ceeace am scris în No. 1 Vol. XXI, când revista intrase în al 21-lea an de apariție. Mă repet deci.*

In anul 1920 răsărise cel mai frumos soare pe cerul frământatei Istorii a Neamului Românesc. *Sub razele acelui soare înmugureau toate soluțiile nouilor probleme cărora* Țara *le cerea o rezolvare și între care era și înființarea de școli superioare românești în Ardeal și Banat. Marele savant matematician* Traian Lalescu, *bănățean de origine, stăruește și obține înființarea unei școli politehnice la Timișoara. Cursurile acestui nou institut de cultură tehnică superioară încep în Noembrie 1920 cu următorul corp profesoral:*

— Tr. Lalescu, *Analiză și Directorul Școlii.*
— C. C. Teodorescu, *Mecanica și Sub-director.*
— Lt.-Col. Gh. Buicliu, *Geometria Analitică.*
— Dr. Ing. C. Cândea, *Chimia.*
— Dr. C. Stăncescu, *Fizica.*
— Ing. V. Vlad, *Geometria Descriptivă.*
— Profesor Kaldor, *Desenul.*
— Profesor A. Coman, *Conferențiar de Matematici generale.*

Examenul de intrare din Noembrie 1920 arătase că este nevoie de o pregătire mai serioasă la matematici și că se impune crearea unui instrument extrașcolar pentru a stimula elevii de liceu la studiul matematicelor. Gazeta Matematică *avea un nivel prea ridicat pentru nevoile liceanului din toate provinciile țărei și mai ales din provinciile care urmau să alimenteze în mod firesc contingentele de studenți ale nouei școli technice.*

Tr. Lalescu *a hotărât după câteva conciliabule cu Dl* C. C. Teodorescu *și cu mine, să scoată o revistă de matematici elementare care să apară în Timișoara. Cam pela finele lui Ianuarie 1921 a venit la locuința mea din Timișoara, Bul. Mihai Viteazul No. 5, și mi-a cerut să prepar material pentru noua revistă. Găsise tipografie, noua tipografie „Cartea Românească", care se deschisese în Timișoara și găsise și mijloace materiale pentru asigurarea tipărirei revistei pe câteva luni, după aceia mijloacele materiale* „le veți mai complecta și spori și voi" *îmi spunea* Traian Lalescu.

Primul număr a apărut la 15 Martie 1921 publicând ca model de rezolvare 4 probleme din Gazeta Matematică, *propuse pe vremuri de* I. Ionescu, V. Cristescu, A. G. Ioachimescu *şi* G. Ţiţeica.

Structura Revistei Matematice din Timişoara *a fost şi este analoagă cu acea a* Gazetei Matematice.

Impulsul dat de Tr. Lalescu *se transformă într'o mişcare continuă, bogată şi ascendentă.*

Dl V. Vâlcovici *numit rector al şcolii în primăvara anului 1921, îmbrăţişează ideia lui* Tr. Lalescu *şi susţine material şi moral continuarea apariţiei revistei, iar dela 1 Noembrie 1921 intră în comitetul de conducere al revistei şi Dl.* Prof. V. Alaci, *numit pe acea dată profesor de Analiză în locul lui* Tr. Lalescu.

Dl. V. Alaci *ia* sarcina *conducerei revistei în înţelesul pur mecanic, şi-o aşează solid pe umeri şi în câteva luni el rămâne sufletul şi viaţa* Revistei Matematice Timişoara. *El este redijor, el corector, el de toate şi aşa continuă să fie şi azi când revista împlineşte 25 ani de apariţie, aşa că nu este de loc exagerat să spun că aniversarea de azi de 25 ani de apariţie a* Revistei Matematice din Timişoara *este în acelaş timp aniversarea a 25 ani de muncă continuă şi idealistă a Dlui Prof.* V. Alaci *pentru stimularea învăţământului matematic şi pregătirea la matematici a candidaţilor la Şcoala Politehnică din Timişoara.*

Dl. V. Alaci *a utilizat în apostolatul D-sale aceleaşi elemente idealiste superioare,* muncă dezinteresată *şi* idealism integral *pe care le foloseşte de 50 ani* Gazeta Matematică, *sora mai în vârstă a* Revistei Matematice din Timişoara.

In această zi de sfârşit de sfert de veac, urez revistei noastre din Timişoara să-şi continue şi să-şi menţină drumul pe care şi l-a croit, iar D-lui V. Alaci *îi urez să aniverseze într'un mare cadru de sărbătoare, împlinirea a 50 de apariţie a acestei reviste.*

UN SFERT DE VEAC DE APARIŢIE.

de

ILIE CONSTANTINESCU

student.

„Revista Matematică din Timişoara" a încheiat 25 ani de neîntreruptă apariţie, participând cu belşug la desvoltarea şi răspândirea ştiinţelor matematice în România.

Toţi cari au activat vremelnic la această minunată revistă simt o nespusă bucurie, născută din mulţumirea pe care o are fiecare, ştiind că în cele 25 de volume ale „R. M. T."-ului stau de veghe, spre mărturie, părticele din gândurile sale, crâmpee din raţionamentele sale, frânturi din munca sa cinstită, desinteresată şi înălţătoare, desfăşurată în frumosul domeniu al matematicei, muncă ce reaminteşte poate clipe de vieaţă dintre cele mai plăcute.

Astăzi, când revista întemeiată de nemuritorul Traian Lalescu *împlineşte un sfert de veac, se cuvine să ne îndreptăm gândul cu pietate către acest strălucit pion al ştiinţei româneşti, a cărui operă va rămâne, în Ţară şi în afară Ţării noastre, drept mărturie vie a geniului românesc.*

Către neobositul profesor V. Alaci, *cunoscutul ei conducător şi animator, încă din primele zile de apariţie, îndreptăm un gând de admiraţie şi recunoştinţă. Munca şi jertfa de fiecare zi a profesorului* V. Alaci, *acest modest slujitor al ştiinţei româneşti, care a dat generaţiilor tinere prilejul să-şi afirme puterile, pregătindu-se temeinic spre cariere ştiinţifice, merită toată cinstea.*

Nici cele mai meşteşugite cuvinte de laudă nu vor putea satisface sau exprima simţămintele noastre pentru dânsul. Om al datoriei şi al muncii stăruitoare şi conştiincioase, plin de abnegaţie şi altruism, profesorul V. Alaci *se găseşte astăzi la o înălţime morală, pe care i-o doresc s'o păstreze ani mulţi în deplină sănătate pentru a duce mai departe făclia ştiinţei şi culturii pusă în slujba afirmării Neamului Românesc.*

Cu multă bucurie se poate vedea astăzi realizată opera. O bună parte din elita profesorilor tineri de matematici, a ofiţerilor de arme speciale şi mai ales din aceia a inginerilor ieşiţi de curând, sunt corespondenţii de altă dată ai „R.M.T."-ului

Suflet, sacrificii şi muncă desinteresată, cimentate în entuziasm şi armonie, iată elixirul de vieaţă fără de sfârşit al „Revistei Matematice din Timişoara".

Pornită cu chibzuială, îndrumată cu stăruinţă, energie şi jertfă, „R. M. T."-ul a fost, este şi va fi un factor de căpetenie al culturii matematice din ţara noastră.

Incheiu acest articol, urând corespondenţilor şi conducătorilor acestei reviste, ani mulţi în deplină sănătate, ca şi de aici înainte să poată să continue mai departe munca luminoasă şi rodnică la această revistă, pentru a fi ca şi până acum în slujba ştiinţei şi a ţării.

---

25 ANI DE EXISTENŢĂ

de

V. ALACI

Revista Matematică din Timişoara şi-a luat impulsul de viaţă din mintea scânteietoare a marelui profesor şi om de ştiinţă Traian Lălescu *primul rector al Politehnicei Timişoara, către memoria căruia îndreptăm astăzi imn de slavă şi de veşnică recunoştinţă.*

Datorită apoi concursului moral şi material al d-lui rector Victor Vâlcovici, — *care a stat în fruntea politehnicei noastre timp de 10 ani şi a înfăptuit mari realizări — precum şi a aceluiaşi concurs preţios al foştilor rectori, d-nii* Victor Blaşian, C-tin Teodorescu, Cornel Severineanu, Ilie Popescu, Victor Laţiu, Plauţius Andronescu, *şi a actualului rector d-l* Marin Bănărescu, *„R.M. T". a învins toate greutăţile şi a apărut regulat la 15 ale fiecărei luni.*

Către toţi aceşti distinşi foşti rectori ai Politehnicei noastre, către actualul nostru distins rector care î-şi face un titlu de mândrie de a susţine prin toate mijloacele apariţia acestei reviste şi către toţi membrii din Comitetul de conducere, îndreptăm un gând de omagiu şi recunoştinţă şi în numele tuturor celor ce au activat la această revistă le aducem vii mulţumiri.

In special trebuie să relevăm, în mod deosebit, concursul cald, pasionat şi permanent al d-lui G-l Gh. Buicliu, *fost timp de 9 ani profesor de Geometrie Analitică la Politehnica din Timişoara*[1]).

D-sa, încă din primele zile ale apariţiei, „R.M.T.", cu toate ocupaţiile multiple ce le-a avut, a dat avânt de dezvoltare şi strălucire revistei noastre, publicând interesante articole, note matematice, probleme propuse şi a redijat numeroase alte probleme, întocmind mulţi ani tabla de materii. Chiar după plecarea d-sale, adânc regretată, d-sa a continuat şi continuă şi astăzi să ne trimeată regulat pentru fiecare număr cel puţin o problemă redijată şi o problemă propusă, însoţite de multe ori de cuvinte de încurajare şi de sugestii valoroase de care am ţinut totdeauna seamă.

De aceea, sărbătorirea de azi, vrem să fie şi o sărbătorire a activităţei intense, a dragostei, a pasiunei şi a entuziasmului d-sale pentru ştiinţă. In numele „R. M. T.", al meu şi al numeroşilor noştri corespondenţi, exprimăm d-lui General Gh. Buicliu *toată gratitudinea, admiraţia şi recunoştinţa noastră, dorindu-i din toată inima încă mulţi ani de rodnică activitate.*

Nu putem uita în această zi de sărbătorire să aducem aceleaşi călduroase mulţumiri d-lui profesor C-tin Teodorescu *şi d-lui Dr. Ing.* Ştefan Nadaşan *pentru sarcina grea de a conduce Administraţia „R. M. T", primul până în 1938 şi al 2-lea care a continuat şi continuă şi astăzi această grea activitate.*

Aceleaşi mulţumiri călduroase se cuvin şi d-lui Ing. Mihai Vasiliu, *pe atunci Sub-director la Fabrica de Tutun, pentru că a îngrijit de redactarea revistei în primul său an.*

Către toţi foştii noştrii corespondenţi şi colaboratori, — de care mă leagă atâtea plăcute amintiri şi alese sentimente izvorîte din timpul colaborării — îndrept gândul meu plin de emoţie şi de mare prietenie, în această zi de sărbătoare şi le doresc realizări cât mai preţioase, cât mai strălucite.

Colaboratorilor noştri, harnicilor şi tinerilor noştri coresponenţi de azi şi de mâine, care găsesc şi vor găsi în paginile acestei reviste, cunoştinţi, îndrumări şi îndemnuri de muncă spornică în ogorul ştiinţelor matematice, le dorim din toată inima să-şi mărească dragostea lor de ştiinţă,

---

[1]) A se vedea articolul: *O solemnitate la Şcoala Politehnică din Timişoara*, Vol. X, No. 1.

să-şi pună în valoare toate forţele lor spirituale pentru o bună pregătire, pentru ca să ajungă ca şi înaintaşii lor elemente de elită ale societăţii şi împreună cu ei să formeze acea armată intelectuală, mândră ambiţioasă, bine pregătită, gata de a valorifica bogăţiile ţării, gata de a ridica cât mai sus steagul ştiinţei româneşti şi a asigura astfel fericirea şi înălţarea Ţării noaste.

FUNCŢII TRIGONOMETRICE INVERSE CU ACEIAŞI DERIVATĂ

DE

V. ALACI.

(Urmare)

Problema 11-a. *Se dau funcţiile*

(25) $y = 2 \operatorname{arc\,tg} Y, \qquad z = \operatorname{arc\,tg} Z$

unde Y *şi* Z *depind de variabila* x. *Cunoscând funcţia* Y, *să se determine* Z *astfel ca derivatele funcţiilor (25) să fie egale.*

Soluţie. Derivatele funcţiilor din (25) trebuind să fie egale, rezultă

$$z = y + C,$$ (C un arc constant oarecare).

Luând tangenta în ambiii membri şi notând $\operatorname{tg} C = k$, avem

(26) $$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{tg} y + k}{1 - k \operatorname{tg} y}.$$

Cum din (25) rezultă

$$\operatorname{tg} z = Z, \quad \operatorname{tg} \frac{y}{2} = Y, \text{ deci } \operatorname{tg} y = \frac{2Y}{1 - Y^2},$$

relaţia (26) ne dă

(K) $$\boxed{Z = \frac{2Y + k(1 - Y^2)}{1 - Y^2 - 2kY}}.$$

Cazuri particulare: 1°. Pentru $Y = x$, formula (K) ne dă

$$Z = \frac{2x + k(1 - x^2)}{1 - x^2 - 2kx}.$$

Putem deci enunţa: *Funcţiile*

$$y = 2 \operatorname{arc\,tg} x \quad , \quad z = \operatorname{arc\,tg} \frac{2x + k(1 - x^2)}{1 - x^2 - 2kx}$$

au aceiaş derivată.

2°. Pentru $Y = \sqrt{1 - x}$ şi $k = 1$, formula (K), ne dă

$$Z = \frac{2\sqrt{1 - x} + x}{x - 2\sqrt{1 - x}}.$$

Putem deci enunţa: *Funcţiile*

(27) $$y = 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{1 - x} \quad , \quad z = \operatorname{arc\,tg} \frac{x + 2\sqrt{1 - x}}{x - 2\sqrt{1 - x}}$$

au aceiaş derivată.

Problema 12-a. *Se dau funcţiile*

(27) $y = m \operatorname{arc\,tg} Y, \quad z = \operatorname{arc\,tg} Z$, ($m$ întreg pozitiv)

unde Y *şi* Z *depind de variabila* x. *Cunoscând funcţia* Y, *să se determine* Z *astfel ca funcţiile din (27) se admită aceiaşi derivată.*

Soluţie. Dezvoltând pe $\operatorname{tg} y$ în funcţie de $\operatorname{tg} \frac{y}{m} = Y$, cum rezultă din prima din relaţiile (27), avem

(28) $$\operatorname{tg} y = \frac{C_m^1 Y - C_m^3 Y^3 + C_m^5 Y^5 - \cdots}{1 - C_m^2 Y^2 + C_m^4 Y^4 - \cdots} = f(Y),$$

de unde urmează

$$y = \operatorname{arc\,tg} f(Y).$$

Acum problema revine: A *determina pe* Z *în funcţie de* Y, *astfel ca funcţiile*

$$y = \operatorname{arc\,tg} f(Y) \quad , \quad z = \operatorname{arc\,tg} Z$$

să aibă aceiaşi derivată.

Aceasta este tocmai *problema 10-a*, în care Y trebuie înlocuit prin $f(Y)$ din (28) şi conform formulei (J), avem

(L) $$\boxed{Z = \frac{f(Y) + k}{1 - k f(Y)}}.$$

Caz particular. Pentru $Y = x$, $m = 3$ şi $k = 1$ formula (L) devine

$$Z = \frac{\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} + 1}{1 - \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}} = \frac{1 + 3x - 3x^2 - x^3}{1 - 3x - 3x^2 + x^3}.$$

Putem deci enunţa: *Funcţiile*

$$y = 3 \operatorname{arc\,tg} x \quad , \quad z = \operatorname{arc\,tg} \frac{1 + 3x - 3x^2 - x^3}{1 - 3x - 3x^2 + x^3}$$

au aceiaşi derivată.

III.

Problemele tratate până aci le credem suficiente deocamdată a pune în evidenţă:

1°. *O metodă simplă pentru a forma oricâte funcţii trigonometrice inverse, care să aibă aceiaşi derivată.*

2°. *O nouă metodă care să ne permită a constata dacă două funcţii trigonometrice date, au sau nu aceiaşi derivată, fără a efectua direct derivarea.*

Şi acum spre folosinţă dăm următorul tablou rezumativ:

y	z	
arc sin Y	arc sin Z	$Z = \pm Y\sqrt{1-k^2} \pm k\sqrt{1-Y^2}$
arc sin Y	2 arc sin Z	$Z = \dfrac{\pm\sqrt{1 \mp kY \pm \sqrt{(1-k^2)(1-Y^2)}}}{\sqrt{2}}$
arc sin Y	arc cos Z	$Z = \mp kY \pm \sqrt{(1-k^2)(1-Y^2)}$
arc sin Y	2 arc cos Z	$Z = \dfrac{\pm\sqrt{1 \pm kY \mp \sqrt{(1-k^2)(1-Y^2)}}}{\sqrt{2}}$
2 arc sin Y	arc cos Z	$Z = \pm(1-2Y^2)\sqrt{1-k^2} \mp 2kY\sqrt{1-Y^2}$
m arc sin Y	arc cos Z	$Z = \mp k f(Y) \pm \sqrt{(1-k)\left[1-f^2(Y)\right]}$, unde $f(Y) = \pm C_m^1 Y\sqrt{(1-Y^2)^{m-1}} \mp (C_m^3 Y^3\sqrt{(1-Y^2)^{m-3}} \pm \dots$
arc sin Y	arc tg Z	$Z = \dfrac{Y \pm k\sqrt{1-Y^2}}{\pm\sqrt{1-Y^2} \mp kY}$
arc sin Y	2 arc tg Z	$Z = \dfrac{\mp\sqrt{1-Y^2} \pm \sqrt{1-k^2}}{k+Y}$
arc cos Y	2 arc tg Z	$Z = \dfrac{-Y \pm \sqrt{1-k^2}}{k \pm \sqrt{1-Y^2}}$
arc tg Y	arc tg Z	$Z = \dfrac{Y+k}{1-kY}$
2 arc tg Y	arc tg Z	$Z = \dfrac{2Y + k(1-Y^2)}{1-Y^2-2kY}$
m arc tg Y	arc tg Z	$Z = \dfrac{f(Y)+k}{1-f(Y)}$, unde $f(Y) = \dfrac{C_m^1 Y - C_m^3 Y^3 + C_m^5 Y^5 - \dots}{1 - C_m^2 Y^2 + C_m^4 Y^4 - \dots}$

Observare: Avem $-1 \leq k \leq 1$, exceptând rândurile 7, 10, 11, 12, unde k poate fi orice număr real.

Acest tablou, care ar mai putea fi completat, este bine să-l avem în vedere pentru următoare obiective enunţate mai sus, anume:

1°. Dacă urmărim să construim două funcţii trigonometrice inverse care sunt scrise într'o linie a tabloului, care să aibă aceiaşi derivată, atunci ne dăm funcţia y, adică luăm pentru Y o funcţie oarecare de x şi atunci a 2-a funcţie z se găseşte luând pentru Z valoarea corespunzătoare din tablou în care Y se înlocueşte cu aceea ce am luat-o. Faptul acesta îl avem realizat în numeroasele cazuri particulare dela problemele tratate.

2°. Dacă ni se dau două funcţii trigonometrice inverse y şi z ce se găsesc trecute într'o linie din tablou, adică dacă ni sunt date Y şi Z în funcţie de variabila x de exemplu, atunci pentru ca să putem afirma că y şi z au aceiaşi derivată, *trebue ca din egalitatea corespunzătoare din tablou, între Z şi Y, să putem determina pentru k o valoare constantă.*

Iată câte-va probleme pe care le vom soluţiona prin această metodă:

Problemă. *Să se arate că funcţiile*

$$(29)\quad y=\operatorname{arc\,tg}\frac{ax}{x^2+a^2}\ ,\quad z=\operatorname{arc\,tg}\frac{ax-x^2-a^2}{ax+x^2+a^2}$$

au aceiaşi derivată.

Soluţie. In tablou, în linia 10-a observăm că avem funcţii de felul celor de mai sus. Scriind relaţia corespunzătoare din tablou, în care înlocuim pe Z şi Y cu valorile lor ce reiasă din (29), obţinem

$$\frac{ax-x^2-a^2}{ax+x^2+a^2}=\frac{\dfrac{ax}{x^2+a^2}+k}{1-\dfrac{akx}{x^2+a^2}}=\frac{ax+k(x^2+a^2)}{x^2+a^2-akx}.$$

Putem uşor rezolvi acum această ecuaţie de gradul întâi în k, dar se observă direct că avem soluţia $k=-1$.

Putem afirma conform celor de mai sus din 2°, că funcţiile (29) au aceiaşi derivată.

Problemă. *Să se arate că funcţiile*

$$(30)\quad y=\operatorname{arc\,sin}\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}\ ,\quad z=\operatorname{arc\,sin}\sqrt{\frac{1-2x^2}{1-x^2}}$$

au aceiaşi derivată.

Soluţie. In tablou, în linia 1-a, observăm că avem funcţii de felul celor de mai sus. Scriind relaţia corespunzătoare din tablou, în care înlocuim pe Z şi Y cu valorile lor ce reiasă din (30) obţinem

$$\sqrt{\frac{1-2x^2}{1-x^2}}=\pm\sqrt{\frac{x^2(1-k^2)}{1-x^2}}\pm k\sqrt{1-\frac{x^2}{1-x^2}},$$

sau, fiindcă în general $x\neq\pm 1$, mai putem scri

$$\sqrt{1-2x^2}=\pm x\sqrt{1-k^2}\pm k\sqrt{1-2x^2}.$$

Se observă uşor, că această ecuaţie este verificată pentru $k=\pm 1$.

Intrucât am obţinut pentru k o valoare constantă, rezultă că funcţiile (30) au aceiaşi derivată.

Problemă. *Să se arate că funcţiile*

$$(31)\quad y=\operatorname{arc\,sin}(\operatorname{tg}x)\ ,\quad z=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}$$

au aceiaşi derivată.

Soluţie. In tablou, în linia 7-a, avem funcţii de felul celor de mai sus. Scriind relaţia corespunzătoare din tablou, în care înlocuim pe Z şi Y cu valorile lor ce reiasă din (31), obţinem

$$\frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}=\frac{\operatorname{tg}x\pm k\sqrt{1-\operatorname{tg}^2x}}{\pm\sqrt{1-\operatorname{tg}^2x}\mp k\operatorname{tg}x},$$

sau

$$\frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}=\frac{\sin x\pm k\sqrt{\cos 2x}}{\sqrt{\cos 2x}\mp k\sin x}.$$

Se observă cu uşurinţă că luând $k=0$, avem o rădăcină a ecuaţiei. Intru cât am obţinut pentru k o valoare constantă, rezultă după cele ce ştim, că funcţiile din (31) au aceiaşi derivată.

Cu un nou prilej ne vom ocupa de alte probleme analoage şi în special vom arăta cum putem construi funcţii logaritmice şi funcţii trigonometrice inverse, care să aibă aceiaşi derivată.

NOTE MATEMATICE

1. — **Théorème.** *Étant donnée la relation multigrade*

$$a_1,\ a_2,\ a_3\overset{2,4}{=}b_1,\ b_2,\ b_3$$

dans laquelle

$$a_2 - a_1 = b_2 - b_1,$$

on aura

$$\boxed{\begin{array}{l} 3a_2 - a_1,\ 3b_1 - b_2,\ 2b_3 - b_2 + b_1,\ 2a_3 + a_2 - a_1, \overset{1,3,5}{=} \\ 3a_1 - a_2,\ 3b_2 - b_1,\ 2a_3 - a_2 + a_1,\ 2b_3 + b_2 - b_1 \end{array}}$$

Démonstration. On applique le théorème général:*)
„D'une égalité multigrade

$$a_1, a_2, \ldots, a_p \overset{x}{=} b_1, b_2, \ldots, b_p$$

vraie pour les valeurs paires 2, 4, .., 2 n de l'exposant, on déduit la suivante:

$$-a_1 + t,\ -a_2 + t, \ldots\ -a_p + t,\ a_1 + t,\ a_2 + t, \ldots\ a_p + t \overset{y}{=}$$
$$-b_1 + t,\ -b_2 + t, \ldots\ -b_p + t,\ b_1 + t,\ b_2 + t, \ldots\ b_p + t$$

$y = 1, 2, 3, \ldots, 2n, 2n + 1$, quelle que soit la valeur de t.

En posant $t = \dfrac{a_2 - a_1}{2} = \dfrac{b_2 - b_1}{2}$ et, en supprimant dans chaque membre les termes opposés, l'égalité ne subsiste plus qu'aux degrés impaires successifs $1, 3, \ldots, 2n-1, 2n+1$, donc ici nous aurons une egalité vraie pour les valeurs 1, 3, 5 de l'exposant et ne renfermant plus que quatre termes par membre, puisque $p = 3$.

Exemples numériques.

α) $1, 9, 10 \overset{2,4}{=} 5, 6, 11$; $\quad 10 - 9 = 6 - 5.$

On en déduit

$$3, 9, 21, 21 \overset{1,3,5}{=} 1, 13, 17, 23.$$

$$S_1 = 54, \quad S_3 = 19.278, \quad S_5 = 8.227.494.$$

β) $43, 47, 81 \overset{2,4}{=} 23, 69, 73$; $\quad 47 - 43 = 73 - 69.$

On en déduit

$$21, 49, 67, 83 \overset{1,3,5}{=} 25, 41, 75, 79.$$

$$S_1 = 220, \quad S_3 = 999.460, \quad S_5 = 5.575.725.100.$$

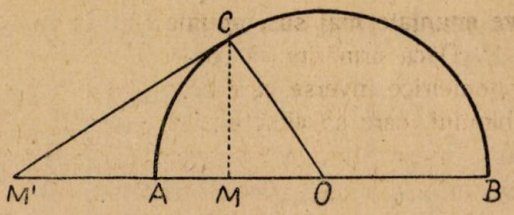
A. GLODEN

---

2. — *Asupra soluției geometrice a unei neegalități.*

Se știe că media geometrică este cuprinsă între media aritmetică și cea armonică.

Iată o soluție geometrică a acestei proprietăți.



Fie C punctul de contact al tangentei duse din punctul M' la un cerc cu centrul în O și fie AB diametrul cercului, ce trece prin punctul M'. Notăm cu M proecția punctului C pe diametrul AB.

Fie $\overline{M'A} = b$ și $\overline{M'B} = a$. Deducem imediat că

$$\overline{M'C} = \sqrt{\overline{M'A} \cdot \overline{M'B}}$$

$$\overline{M'O} = \frac{\overline{M'A} + \overline{M'B}}{2} \quad \text{și} \quad \overline{M'M} = \frac{\overline{M'C}^2}{\overline{M'O}}.$$

Dar în triunghiurile dreptunghice M'CO și M'CM catetele sunt mai mici decât ipotenusele:

$$\overline{M'M} < \overline{M'C} < \overline{M'O}$$

înlocuind, avem

$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}.$$

MARIA NEUMANN

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul LI, No. 6, Februarie 1946. Raportul prezentat Adunării generale extraordinare din 26 Noemvrie 1945 a „Gazetei Matematice" asupra serbărilor semicentenarului ei, de *Petre Sergescu*. Ședința festivă din ziua de 27 Octomvrie 1945, de *C. Ionescu-Bujor*. Darea de seamă asupra ședinței publice din marele amfiteatru al Politehnicei București, de Lt. C-dor Ing. *Aurelian I. Stan*. Darea de seamă asupra Expoziției cărții românești de matematică, de Arh. *Ad. Gheorghiu*. Dare de seamă asupra mesei comune din ziua de 28 Octomvrie 1945 și asupra vizitei făcută în după amiaza aceiași zile acasă la d-l Profesor *Ion Ionescu*, de *Alexandru Roșu*. Răspunsul *M. S. Regelui* la telegrama de omagiu a Societății „Gazeta Matematică". Dare de seamă asupra primirei participanților la al 3-lea Congres al Matematicienilor, în localul „Gazetei Matematice", de *N. N. Mihăileanu*. Matematica și Cultura, de *N. Ciorănescu*. Semicentenarul „Gazetei Matematice", de *D. A. Stan*. Matematica în învățământul secundar, de *G. D. Simionescu*. Note din trecutul matematicei la Români, de *Petre Sergescu*. Semicentenarul „Gazetei Matematice, de Prof. Ing. *D. A. Stan*. Al 3-lea Congres al Matematicienilor Români, de *Petre Sergescu*. † *Teodor C. Stoicescu*; Relațiuni între suprafețele de triunghiu, de *D. V. Ionescu*. Concursul „Gazetei Matematice". Note matematice, probleme rezolvate și propuse.

---

*) cf, Sur les égalités multigrades, par *A. Gloden*, Luxemburg, 1938, page 18.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1662. — *Să se arate că rădăcinele ecuației*

$$\begin{vmatrix} x^n & x^{n-1} & x^{n-2} & x^{n-3} & \dots & x \\ C_n^2 & C_{n-1}^1 - n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_n^3 & C_{n-1}^2 & C_{n-2}^1 - n & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ C_n^n & C_{n-1}^{n-1} & C_{n-2}^{n-2} & C_{n-3}^{n-3} & \dots & C_n^1 - n \end{vmatrix} = 0$$

sunt $x = 0, -1, -2, \dots, (n-1)$.

VASILE VASU

Soluția autorului. Inmulțind elementele liniilor a 2^{-a}, a 3^{-a}, a n^{-a} respectiv cu $x^{n-2}, x^{n-3}, \dots x^0$ și adunându-le primei linii, ținând seamă și de binomul lui *Newton*, avem

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} (x+1)^n - n x^{n-1} & (x+1)^{n-1} - n x^{n-2} & (x+1)^{n-2} - n x^{n-3} & \dots & (x+1) - n \\ C_n^2 & C_{n-1}^1 - n & 0 & \dots & 0 \\ C_n^3 & C_{n-1}^2 & C_{n-2}^1 - n & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ C_n^n & C_{n-1}^{n-1} & C_{n-2}^{n-2} & \dots & C_1^1 - n \end{vmatrix} = 0.$$

Determinantul din primul membru se poate descompune într'o sumă de doi determinanți, datorită faptului că elementele primei linii au fiecare câte doi termeni, astfel că notând cu $\Delta(x)$ determinantul dat, acel din (1) se poate scri

$$\Delta(x) \equiv \Delta(x+1) - \frac{n}{x}\Delta(x),$$

sau

$$(2)\qquad \Delta(x) \equiv \frac{x}{x+n}\Delta(x+1).$$

Forma acestei relații ne arată că rădăcinile ecuației propuse se pot obține una din alta. Rămâne să arătăm că ecuația admite una din rădăcinele cerute (afară de $x = 0$, evidentă).

Pentru aceasta înmulțim elementele liniei a 2^{-a} a $3^a, \dots,$ a n^{-a} a determinantului propus respectiv cu $(-1)^{n-2}, (-1)^{n-3} \dots, (-1)$ și le adunăm la linia n^a, ținând seamă de egalitatea cunoscută

$$C_p^p - C_p^{p-1} + C_p^{p-2} + \dots + (-1)^{p-1} C_p^1 + (-1)^p = 0.$$

Elementele ultimei linii vor fi respectiv

$$\begin{aligned} &C_n^n - C_n^{n-1} + \dots + (-1)^{n-2} C_n^2 = (-1)^n n + (-1)^{n+1} = (-1)^n (n-1), \\ &C_{n-1}^{n-1} - C_{n-1}^{n-2} + \dots + (-1)^{n-2}(-n) = (-1)^{n-1} n + (-1)^n = (-1)^{n-1}(n-1), \\ &C_{n-2}^{n-2} - C_{n-2}^{n-3} + \dots + (-1)^{n-3} C_{n-2}^1 + (-1)^{n-3}(-n) = (-1)^{n-2} n + (-1)^{n-1} = (-1)^{n-2}(n-1), \\ &\cdot \quad \cdot \quad \dots \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &C_1^1 - n \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = (-1)(n-1). \end{aligned}$$

Ecuația dată, lăsând la o parte factorul $n-1$, se poate scri

$$\begin{vmatrix} x^n & x^{n-1} & x^{n-2} & \dots & x \\ C_n^2 & C_{n-1}^1 - n & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ (-1)^n & (-1)^{n-1} & (-1)^{n-2} & \dots & (-1) \end{vmatrix} = 0$$

și este evident că admite rădăcina $x = -1$, adică $\Delta(-1) = 0$, având două linii identice.

Din identitatea (2), în care facem succesiv $x = -2, -3, \dots, -n$ se deduce

$$\Delta(-2) = \frac{-2}{-2+n}\Delta(-1) = 0$$

$$\Delta(-3) = \frac{-3}{-3+n}\Delta(-2) = 0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\Delta[-(n-1)] = \frac{-(n-1)}{1}\Delta[-(n-2)] = 0$$

$$\Delta(-n) = \frac{-n}{0}\Delta[-(n-1)] = \frac{0}{0} \neq 0.$$

Așa dar ecuația admite rădăcinele $0, -1, -2, \dots, -(n-1)$.

Valoarea $-n$ nu este rădăcină a ecuației propuse, fiindcă ecuația fiind de gradul n, are numai n rădăcini pe care le-am evidențiat mai sus.

Problema 1723. — *Să se arate că dacă*

$$|1-x|>1$$

se verifică egalitatea

$$(2-x)\sum_1^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{(1-x)^n}=-x\sum_1^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(1-x)^n}$$

MIHAIL BOTEZ

Soluție. Progresia geometrică

$$(1)\quad \varphi(x)=1-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{(1-x)^3}+\cdots$$

având rația $\left|-\frac{1}{1-x}\right|<1$, fiindcă prin ipoteză $|1-x|>1$, se poate însuma și avem

$$\varphi(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{1-x}}=\frac{1-x}{2-x}.$$

De asemeni seria (1) se poate deriva termen cu termen fiind o serie de puteri convergentă

$$X=\left|\frac{-1}{1-x}\right|<1$$

și avem

$$-\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{3}{(1-x)^4}+\cdots=\frac{-1}{(2-x)^2},$$

sau

$$(2)\qquad \sum_1^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(1-x)^n}=\frac{-(1-x)}{(2-x)^2}.$$

Derivând din nou și înmulțind apoi cu $(1-x)$, avem

$$(3)\qquad \sum_1^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{(1-x)^n}=\frac{x(1-x)}{(2-x)^3}.$$

De aci rezultă, având în vedere relația (2)

$$(2-x)\sum_1^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{(1-x)^n}=-x\frac{-(1-x)}{(2-x)^2}=$$

$$-x\sum_1^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(1-x)^n}.$$

Astfel egalitatea dată este stabilită.

Problema 1874. — *Să se găsească numărul de trei cifre abc știind că produsul $6\times abc$ este tot un număr de trei cifre scris cu cifrele a, b, c.*

G-L GH. BUICLIU

Soluție. Pentru ca $6\times abc$ să fie de 3 cifre trebue ca

$$a=0 \quad \text{sau} \quad a=1.$$

1°. $a=0$. Vom avea

$$6\times bc=b0c,\ bc0,\ cb0,\ c0b \text{ sau } 0cb.$$

Primul caz dă

$$60\times b+6c=100b+c \quad {}^{*}_{*}{}^{*} \quad c=8b$$

$$^{*}_{*}{}^{*} \qquad c=8,\quad b=1$$

și deci soluția

$$\boxed{6\times 018=108}.$$

Examinând la fel celealte cazuri, nu mai găsim soluție.

2°. $a=1$. Trebue să avem

$$6\times 1bc=1cb,\quad b1c \quad \text{sau} \quad c1b.$$

Primul caz dă egalitatea

$$500+59b=4c,$$

care este imposibilă pentru $c<10$. Se arată la fel că și celelalte cazuri duc la imposibilități, deci pentru 2° nu avem soluție.

Au rezolvat bine problema găsind soluția de la 1° un anonim și d-nii: *Chiriac Const.* (Marina Regală), *Facsko I. Gheorghe* (Lic. Diaconovici Loga, Timișoara), *Radoslav Gh. Ion* (student, Politehnica, Timișoara), S-Lt *Tilică Ștefan* (Tâmna, Mehedinți).

Au interpretat enunțul că $6\times abc$ să fie scris cu o parte din cifrele lui abc și au găsit soluția

$$6\times 148=888$$

d-nii: Lt. *Boerescu P. G.* (Constanța) și *Godea P. Ioan.*

Problema 1915. — *Să se demonstreze că dacă*

$$u_n=\operatorname{Log}\frac{(n+a)(n+b)}{(n+a+1)(n+b+1)},$$

atunci suma

$$S=u_1+u_2+\cdots+u_n+\operatorname{Log}(n+a+1)(n+b+1)$$

este constantă ori care ar fi n.

G L GH. BUICLIU

Soluție. Dând lui n valorile $1, 2, \ldots, n$, avem

$$S = \text{Log}\frac{(1+a)(1+b)}{(2+a)(2+b)} + \text{Log}\frac{(2+a)(2+b)}{(3+a)(3+b)} + \cdots$$
$$+ \text{Log}\cdot\frac{(n+a)(n+b)}{(n+a+1)(n+b+1)} +$$
$$+ \text{Log}(n+a+1)(n+b+1).$$

Membrul al doilea este logaritmul unui produs și conduce la

$$S = \text{Lg}\frac{(1+a)(1+b)(2+a)(2+b)\ldots(n+a)(n+b)(n+a+1)(n+b+1)}{(2+a)(2+b)(3+a)(3+b)\ldots(n+a)(n+b)(n+a+1)(n+b+1}$$

$$S = \text{Log}\,(1+a)(1+b).$$

Au dat această soluție D-nii: *Bakonyi C., Gâță Gh. Gh., Gligor N. Ioan, Ionescu F. P.* și *Wegener Eugen.*

Problema 2335. — *Într'un triunghiu în care notațiile sunt cele obicinuite, avem relațiile:*

$$b\cos B + c\cos C - 2a\cos B\cos C = R\sin 2A,$$

$$a + b - \frac{c\sin\frac{A}{2}}{\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)} = 2b\cos^2\frac{C}{2} + c\sin B\,\text{cotg}\left(B+\frac{A}{2}\right).$$

V. ALACI

Soluție. 1. Notând cu E_1 primul membru al relației întâia și ținând seamă de relațiile cunoscute, $a = 2R\sin A$, etc., avem succesiv

(1) $E_1 = 2R\sin B\cos B + 2c\sin C\cos C - 4R\sin A\cos B\cos C = R(\sin 2B + \sin 2C - 4\sin A\cos B\cos C).$

Dar,

$$4\sin A\cos B\cos C = 2\sin A[\cos(B+C) + \cos(B-C)] = 2\sin A[-\cos A + \cos(B-C)]$$
$$= -\sin 2A + 2\sin(B+C)\cos(B-C) = -\sin 2A + \cos 2B + \cos 2C,$$

astfel că relația (1) devine

$$E_1 = R(\sin 2B + \sin 2C + \sin 2A - \sin 2B - \sin 2C) = R\sin 2A.$$

Prima relație este stabilită.

2. Plecăm de la relația cunoscută într'un triunghiu ABC, anume

$$a = b\cos C + c\cos B,$$

pe care supunând-o la transformări ușor de urmărit, avem succesiv

$$a = b\left(2\cos^2\frac{C}{2} - 1\right) + c\frac{\cos B\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)}{\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)},$$

sau

$$a + b = 2b\cos^2\frac{C}{2} + c\frac{\cos B\sin B\cos\frac{A}{2} + (1-\sin^2 B)\sin\frac{A}{2}}{\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)}$$

$$= 2b\cos^2\frac{C}{2} + c\frac{\sin B\left(\cos B\cos\frac{A}{2} - \sin B\sin\frac{A}{2}\right) + \sin\frac{A}{2}}{\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)},$$

sau

$$a+b-\frac{c\sin\frac{A}{2}}{\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)}=2b\cos^2\frac{C}{2}+c\frac{\sin B\cos\left(B+\frac{A}{2}\right)}{\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)}.$$

De aci deducem,

$$a+b-\frac{c\sin\frac{A}{2}}{\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)}=2b\cos^2\frac{C}{2}+c\sin B\operatorname{cotg}\left(B+\frac{A}{2}\right).$$

Relaţia 2-a este astfel şi ea stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Beschea Radu* (Brăila), *Bogza Mihai* (Lic. Deva), *Braşoveanu Gh.* (Colegiul „Carol I", Craiova), *Cârnaţiu Ioan* (Polit., Timişoara), *Chesaru P. Cristea* (Polit., Timişoara), *Constantinescu Ilie* (Polit. Timişoara), *Dobrişan Alexandru* (Polit., Timişoara), *Dobrotescu Gh.* (Lic. Caracal), *Haret Radu*, *Mircea Gh.*, (Polit., Timişoara), *Nedelcu Ulpius* (bacalaureat, Timişoara), *Petrovici Adalbert* (Brad), *Safta Nicolae* (Liceul Caracal), *Serengău Mihai* (Polit, Timişoara), *Stroescu Florea* (Lic. Caracal), *Tincu C. C-tin* (Polit., Timişoara), *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Titero Ioan* (Polit., Timişoara) şi *Vlăduţ C-tin* (Polit. Timişoara).

PROBLEME PROPUSE

2402. — Să se găsească toate numerile de trei cifre abc ştiind că trei din aranjamentele cifrelor a, b, c luate câte două sunt în progresie aritmetică.

G L Gh Buicliu

2403. — Ce număr de două cifre este cu 3 unităţi mai mare de cât triplul altuia tot de două cifre, ştiind că patratul primului se obţine din patratul celui de al 2-lea, adăogându-i la sfârşit cifra 9?

N N. Anitescu

2404. — Să se rezolve ecuaţia

$$15x^6-16x^5+57x^4+98x^3+57x^2-16x+15=0$$

ştiind că două rădăcini complexe conjugate cu partea reală egală cu $-\frac{2}{3}$, sunt una inversa celeilalte.

A. Dobrescu

2405. — Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{a^2+b^2}=\dfrac{(x-y)^2}{(a-b)^2}\\[2ex]\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1.\end{cases}$$

Ilie N. Constantinescu

2406. — Să se arate că funcţiile

$$y=\arccos\frac{x-1}{x+1},\ z=2\operatorname{arc\,tg}\frac{9-x}{3(x+1)+10\sqrt{x}}$$

au aceiaşi derivată. Să se explice rezultatul.

V. Alaci

2407 — Se dă un cerc şi două puncte fixe A şi B situate pe acest cerc. Fie M un punct variabil de pe cerc. Să se găsească locul geometric al intersecţiei dreptei AM cu perpendiculara scoborâtă din mijlocul segmentului MB pe dreapta AM.

Aurel Mitric

2408. — Dându-se două puncte pe o parabolă, să se găsească un al 3-lea punct, astfel ca normalele la parabolă în cele trei puncte să fie concurente.

Cpt. M. Grumazescu

2409. — Să se arate că într'un triunghiu ALC, avem relaţia:

$$\sin A\cos 2A\sin(C-B)+\cos B\cos 2B\cos(A-C)=\cos C\cos 2C\cos(A-B).$$

Maria Neumann

Revista Matematică din Timișoara apare sub conducerea unui comitet compus din:

1. *Abramescu N.*, Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj.
2. *Adam D. R.* Sublocotenent de geniu, Strada M. Cogălniceanu 31 București.
3. *Adamescu M.*, Licențiat în Matematici, Inspector Financiar, București.
4. *Alaci V.*, Doctor în Matematici, Profesor la Politehnică, Timișoara.
5. *Alaci V. Victor*, Inginer, Asistent la Politehnica din Timișoara.
6. *Almăjan* P., Locotenent, Licențiat în Matematici, Strada Zaharia 23, București.
7. *Ambruș Fr.*, Inginer, Asistent, Polit., Timișoara.
8. *Anastasiade I.*, Inginer, Profesor pensionar, Politehnica, Timișoara.
9. *Aniței escu N. N.*, Profesor, lic. T. Vladimirescu, Tg.-Jiu.
10. *Andronescu P.*, Doctor-Inginer, Profesor de Electrotehnică la Politehnică.
11. *Angheluță Th.*, Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj.
12. *Ardelean Șt.*, Inginer, Director și Profesor, Liceul Industrial Timișoara.
13. *Arghiriade Em*, Doctor în Matematici, Conferențiar de Matematici Generale la Polit., Timișoara.
14. *Baidaff B. I.*, Doctor în Matematici, Buenos Aires, Republica Argentina (Avenida de Mayo 560).
15. *Băncilă Gh.*, Inginer, Asistent Polit., Timișoara.
16. *Bădescu Radu*, Doctor în Matematici, Profesor la Facultatea de Agronomie, București.
17. *Bakony C*, Inginer, Profesor de Tehnologie la Politehnica Timișoara.
18. *Bănărescu M.*, Inginer, Profesor la Politehnică, Rectorul Politehnicei din Timișoara.
19. *Bărglăzan A.*, Doctor Inginer, Profesor la Mașini Hidraulice, dela Politehnica Timișoara.
20. *Barna L.*, Inginer, Asistent Politehnica Timișoara.
21. *Baron C*, Șef de lucrări la catedra Fizică dela Politehnică, Timișoara.
22. *Beneș Paul*, Profesor la Liceul Schewitz - Thierrin, București.
23. *Brătucu C.*, Inginer, Asistent la Politehnica din Timișoara.
24. *Berindean V.*, Inginer, Asistent Polit. Timișoara.
25. *Berzănescu A.*, Inginer, Asistent Polit. Timișoara.
26. *Blașian V.*, Inginer de Mine, Profesor onorar la Politehnică, Timișoara.
27. *Bobârnac M.*, Inginer, Societatea Astra, Brașov.
28. *Bonea I.*, Director de studii și Profesor la Topografie și Geodezie, Politehnică, Timșoara.
29. *Botez M.*, Doctor în Matematici, Conferențiar de Geometrie Descriptivă și Stereotomie la Politehnica Gh. Asachi, Iași.
30. *Boșian O*, Inginer. Asistent Polit., Timișoara.
31. *Buiciu Gh.*, General de Artilerie, fost 10 ani Profesor de Geometrie Analitică la Școala Politehnică din Timișoara. Însărcinat cu conferința de Balistică Exterioară la Politehnica din București, Strada M. Cogălniceanu 10, București II.
32. *Bumbu V.*, Inginer, Conferențiar Politeh., Timișoara.
33. *Câlniceanu C*, Inginer, Conferențiar la Politehnica din Timișoara.
34. *Chiriței escu N.*, Inginer, Asistent la Politehnica din Timișoara.
35. *Călugăreanu George*, Doctor în Matematici, Profesor de Teoria Funcțiilor la Universitatea din Cluj.
36. *Cândea C.*, Doctor-Inginer, Profesor la Politehnica din Timișoara.
37. *Catona V.*, Inginer, Asistent pe lângă catedra de Măsuri Electrice la Politehnica din Timișoara.
38. *Cătuneanu C.*, Inginer, Profesor Politehnica din Timișoara.
39. *Ciobanu V.*, Inginer, Asistent la Politehnica din Timișoara.
40. *Cetățeanu Stelian*, Inginer, U. D. R. Reșița.
41. *Cioclov N.*, Inginer, Asistent la Politehnica din Timișoara.
42. *Claudian Virgil*, Profesor la Liceul Mihai Viteazul din București.
43. *Coman A.*, Profesor onorific la Politehnică și la liceul Diaconovici Loga din Timișoara.
44. *Comănescu A.*, Licențiat în Matematici, Profesor la Liceul din T.-Măgurele.
45. *Constantinescu G. G.*, Doctor în Matematici, București.
46. *Constantinescu Gh.*, Profesor la Liceul Lazăr, București.
47. *Contrea A.*, Doctor în Științe Naturale, Asistent pe lângă catedra de Mineralogie și Petrografie dela Politehnica din Timișoara.
48. *Costăchescu V. C.*, Lt C-dor de Marină, Constanța.
49. *Cristescu I.*, Inginer, Profesor onorar la Politehnica din Timișoara.
50. *Cristodorescu Gh.*, Inginer, Asist. la Polit., Timișoara.
51. *Cristodulo N*, Licențiat în Chimie, Asistent pe lângă catedra de Chimie dela Politecnica din Timișoara.
52. *Cserveny I.*, Inginer U. D. R. Reșița.
53. *Curea I.*, Doctor în Matematici, Conferențiar de Matematici Generale și mecanică la Facultatea de Agronomie, Cluj.
54. *Demetrescu Gh.*, Doctor în Matematici, Subdirector la Observatorul Astronomic din București.
55. *Dăscălescu Hr.*, Profesor, lic. Regele Ferdinand, R.-Sărat.
56. *Diaconescu N.*, Profesor la Liceul din Slatina.
57. *Dimitriu Gh.*, Inginer, Conferențiar Politehnica Timișoara.
58. *Dinculescu C.*, Inginer, Profesor Polit., Timișoara.
59. *Dobrescu Filoftea*, Inginer, Asistentă Polit., Timișoara.
60. *Dumitriu-Dada*, Profesor la Colegiul Carol I, Craiova.
61. *Filipescu Miltiade*, Doctor, Profesor la Facultatea de Științe, București.
62. *Florescu M*, Inginer, Inspector Silvic, Strada A. Orescu 9, București.
63. *Frătici I.*, Inginer, Asistent la Politehnica din Timișoara.
64. *Fridlovsky A*, Asistentă Politehnica Timișoara.
65. *Georgescu D.*, Profesor la Liceul din Pitești.
66. *Gheorghiu Th. Gh.*, Doctor în Matematic, Profesor de Geometrie Descriptivă la Politehnica din Timișoara.
67. *Gheorghiu A.*, Inginer, Conferențiar la Politehnica din Timișoara.

68 *Ghițescu Spiridon*, Profesor secundar, București.
69. *Ghițescu Virgil*, Profesor secundar Brașov, str. Dorobanților No. 5.
70. *Ghircoiașiu V. Nicolae*, Asistent la Facultatea de Știință, Cluj.
71. *Gloden A.*, Doctor în Matematici, Profesor à l'Athènée, Rue Jean Jaurés 11. Luxemburg.
72. *Goga Florian*, Licențiar în Matematici, Asistent la Politehnică.
73. *Grumăzescu Mircea*, Căpitan str. Spiru Gheorghiu 28, București.
74. *Hriatiuc Em.*, Inginer, Asistent, la Politehnica, Timișoara.
75. *Hermann V.*, Licențiat în Matematici, comuna Baia, județul Arad.
76. *Hofer O.*, Profesor lic. Comercial, Asistent Politehnica din Timișoara.
77. *Honae C*, Inginer, Asistent Politehnica, Timișoara.
78. *Hristea H.*, Inginer-Inspector General la C. F. R.
79. *Iacob Șt. Eugen*, Maior, str. Smârdan 2A, Galați.
80. *Iasinski N.*, Inginer, Asistent, Politehnica, Timișoara.
80bis. *Ilea Șt.*, Asistent, Politehnica, Timișoara.
81. *Ionescu-Biss P. H.*, Licențiat în Matematici, București.
82. *Ionescu Bujor C-tin*, Licențiat în Matematici, Directorul Liceului din Buftea.
83. *Ionescu D. V.*, Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj.
84. *Ionescu-Țiu D. C.*, Maior, Licențiat în Matematici, Calea Griviței 158, București.
85. *Ivănescu Cezar*, Profesor Liceul Militar, Târgoviște.
86. *Jivănescu Șt*, Inginer, Asistent Polit., Timișoara.
87. *Juncu N.*, Inginer, Asistent la Politehnica din Timișoara.
88. *Kielburger M.*, Inginer, Șef de lucrări pe lângă Catedra de Electrotehnică la Politehnica, Timișoara.
89. *Kühn I.*, Doctor în Chimie, Șef de lucrări pe lângă Catedra de Chimie Generală la Politehnica din Timișoara.
90. *Lambrino Vlad*, Inginer, Asistent Politehnica, Timișoara.
91. *Lascu Bal*, Licențiat în Matematici, preparator la Facultatea de științe din Cluj.
92. *Latiu V.*, Doctor în Științe Naturale, Profesor la Catedra de Mineralogie și Petrografie la Politehnica din Timișoara.
93. *Leonida D.*, Inginer, Profesor la Politehnica din București.
94. *Linteș I.*, Comandor Doctor Inginer, Conferențiar la Politehnica din București.
95. *Liteanu Gh.*, General de Artilerie, București.
96. *Lupan A.*, Inginer, Profesor onorar, Timișoara.
97. *Macovschi Eug.*, Doctor în Chimie, Profesor la Facultatea de Științe, București.
98. *Maior Nic.*, Inginer, Profesor la Politehnica din Timișoara.
99. *Manughevici C.*, Inginer-Chimist, șef de Lucrări la Politchnica din Timișoara.
100. *Mardan D.*, Inspector General, Profesor la Politehnica din Timișoara.
101. *Mărculescu Origen*, Profesor la Colegiul „Carol I" Craiova.
102. *Marinescu I.*, Doctor-Inginer, Profesor la Politehnica din Timișoara.
103. *Mateescu S*, Doctor în Științe Naturale, Profesor onorar, Timișoara.
104. *Mătieș V. I.*, Profesor la Liceul din Blaj.
105. *Mereuță Emilian*, Licențiat în Matematici, Strada Vatra Luminoasă 89, București IV.
106. *Milcovean D.*, Doctor-Inginer, Asistent Politehnica Timișoara.
107. *Mihăileanu N. N.*, Profesor secundar, București.
108. *Mioc V.*, Licențiat în Matematici, Directorul Liceului Loga, Asistent pe lângă Catedra de Analiza Matematică la Politehnica din Timișoara.
109. *Murariu P.*, Licențiat în Matematici, Profesor la Liceul Loga Timișoara, și Asistent la Polit., Timișoara.
110. *Murgulescu Elena*, Licențiată în Matematici, Asistentă la Politehnica din Timișoara.
111. *Murgulescu G. I.*, Doctor în Chimie, Profesor la Politehnica din Timișoara.
112. *Musta Ștefan*, Profesor secundar, Strada Pavel 4, Beiuș.
113. *Nadașan Șt.*, Doctor-Inginer, Profesor la Catedra de Rezistența Materialelor la Politehnica din Timișoara.
114 *Naneș Gh*, Profesor pensionar, București.
115. *Nicolau A.*, Inginer, Profesor la Politehnica din Timișoara.
116. *Nicolau P.*, Inginer, Profesor onorar, Timișoara.
117. *Ogrin N.*, Doctor în Științele Comerciale, Conferențiar la Politehnica din Timișoara.
118. *Oltenschi I.*, Inginer, Profesor Polit., Timișoara.
119. *Onicescu O.*, Doctor în matematici, Profesor la Universitatea din București, Str. Clopotarii Vechi 25, București.
120. *Orășeanu C*, Inginer-șef, Licențiat în Matematici, Profesor la Politehnica din București.
121. *Orășanu Gr*, Profesor secundar, București.
122. *Patriciu Valeriu*, Doctor, Profesor la Catedra de Geologie Economică și Zăcăminte la Politehnica din Timișoara.
123. *Petrescu A.*, Profesor onorar, București.
124. *Poboran I. V.*, Inginer, Profesor Polit., Timișoara.
125. *Pop Em*, Asistent Politehnica, Timișoara.
126. *Pop V.*, Inginer, Asistent Politehnica, Timișoara.
127. *Popa N.*, Inginer, Asist. Polit., Timișoara.
128. *Popescu E*, Doctor în Chimie, Profesor la Politehnica, București.
129. *Popescu Eug.*, Inginer, Asistent, la Politehnica din Timișoara.
130. *Popescu I.*, Inginer, Profesor de Mașini Miniere la Politehnica din Timișoara.
131. *Popescu N. Corneliu*, Profesor, Călărași.
132. *Predoescu I. M.*, Inginer la Societatea „Astra Română", județul Prahova și Asistent la Polit., Timișoara
133. *Protopopescu I.*, Inginer-Șef, Profesor la Politehnica din Timișoara.
134. *Purcariu I.*, Doctor în Fizică, Profesor la Academia Comercială din București.
135. *Purcariu I.*, Inginer, Asistent Polit., Timișoara.
136. *Porumb N.*, Inginer, Conferențiar Polit., Timișoara.
137. *Racliș N. R.*, Doctor în Matematici, Directorul Institutului Matematic Român, Conferențiar la Politehnica din București.
138. *Rădulet R.*, Doctor-Inginer, Conferențiar la Politehnica din Timișoara.
139. *Roibănecu C.*, Profesor, București.

140. *Roman I.*, Inginer, Asistent la Politehnica Timişoara.
141. *Sauciuc L.*, Doctor în Chimie, Conferenţiar la Politehnica din Timişoara.
142. *Safirescu D.*, Magistrat Conferenţiar Politehnica Timişoara.
143. *Sălceanu C.*, Doctor în Fizică, Profesor, Politehnica Timişoara.
144. *Savin C. Ion*, Licenţiat în Malematici, Strada Sărăriei 56, Iaşi.
145. *Savi Gh.*, Inginer, Asistent Politehnica, Timişoara.
146. *Schram Edith*, Inginer, Timişoara.
147. *Schileriu I.*, Inginer, Profesor Polit., Timişoara, Director General la P. T. T.
148. *Scărlătescu D.*, Inginer, Profesor la Liceul Industrial din Timişoara.
149. *Sergescu P.*, Doctor în Matematici, Licenţiat în Filosofie, Profesor şi Rector la Politehnica din Bucureşti.
150. *Severineanu C.*, Inginer-Şef, Profesor, la Politehnica din Bucureşti.
151. *Silaş Gh.*, Profesor Lic. Industrial, Asistent Politehnica Timişoara.
152. *Simionescu D. Gh.*, Licenţiat în Matematici, Profesor secundar şi Inspector Şcolar, Bucureşti.
153. *Smighelschi O.*, Inginer la Fabrica „Nitrogen" Dicio-Sân-Martin.
154. *Stamatescu I.*, Profesor la Liceul „Matei Basarab" şi „Seminarul Pedagogic Universitar", Bucureşti.
155. *Stambuleanu A.*, Doctor-Inginer, Conferenţiar la Politehnică, Timişoara, Subsecretar de Stat.
156. *Stamate I. Ionel*, Licenţiat în Matematici, Cluj.
157. *Stan A.*, Căpitan de Artilerie, Licenţiat Matematici, Bucureşti.
158. *Stăncescu C*, Doctor-Inginer, Profesor onorar la Politehnica Timişoara.
159. *Stantzel E*, Inginer, Asistent pe lângă Catedra de Construcţii dela Politehnica, Timişoara.
160. *Stoicescu L.*, Inginer, Profesor de Fizică Industrială la Politehnica din Timişoara.
161. *Stoicescu M.*, Profesor şi Director la Liceul „Gheorghe Lazăr", Bucureşti.
162. *Suba P.*, Inginer, Asistent la Politehnica din Timişoara.
163. *Tarţa Tr*, Inginer, Asistent Polit. Timişoara.
164. *Teodorescu C.*, Inginer-Şef Profesor la Politehnica din Bucureşti.
165. *Teodosiu A.*, Doctor în Matematici, Profesor onorar Timişoara.
166. *Tică M.*, Inginer, Asistent Politehnica Timişoara.
167. *Tino O.*, Doctor în Matematici, Profesor la Catedra de Geometrie Analitică la Polit., Timişoara.
168. *Trufin E.*, Inginer, Conferenţiar Polit. Timişoara
169. *Turcu V.*, Profesor secundar, Asistent la Politehnica din Timişoara.
170. *Vâlcovici V*, Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Bucureşti, Strada Londra 44 Bucureşti.
171. *Viciu Aurel*, Profesor, Cluj.
172. *Vişa Eugen*, Licenţiat în Matematici, Profesor la Liceul Sf. Sava, Bucureşti.
173. *Vlad I. V.*, Arhiteht-Inginer, Profesor la Politehnica din Timişoara.
174. *Vlădescu I.*, Doctor-Inginer, Inspector Regional C.F.R. Profesor la Polit hnica din Timişoara.
175. *Zăgănescu I.*, Inginer-Inspector la C. F. R. şi Profesor la Politehnica Timişoara.
176 *Zaharia N. O.*, Profesor, Constanţa.
177. *Zapan Gr*, General, Inginer de Construcţii Aeronautice şi Mecanice (E. N. S. A. Paris) Şeful Serviciului Tehnic al Regiunii 3 Aeriene, Strada Pasteur 44, Bucureşti 6.
178. *Zgeban V.*, Inginer, Conferenţiar Polit. Timişoara.
179. *Weber Matei*, Licenţiat în Matematici, Timişoara.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Birănaş Ioan (2371, 2374); *Boerescu G.* (N. P); *Bogza Mihai* (P; 2371, 2375, 2383); *Brasch Andrei* (2121, 2135, 2159, 2396, 2399, 2401); *Cârnaţiu Ioan* (P; 2452, 2366); *Constantinescu Ilie* (P); *Coţiu Aurel* (2293, 2363, 2367, 2381); *Cristea Mircea* (P; 2387, 2389, 2391); *Dobrişan Alexandru* (P; 2316, 2331, 2338, 2339, 2347, 2349, 2350, 2367, 2368, 2371, 2373, 2380, 2381, 2383, 2387, 2389, 2390, 2394, 2397, 2396, 2400); *Fleseriu Eugen* (2380, 2389, 2390); *Frunză Radu* (P; 2383, 2389, 2396, 2401); *Goldiş Gheorghe* (P; 2380, 2383, 2384, 2387, 2389, 2390, 2391, 2395, 2396, 2400, 2401); *Grigore Gheorghe* (2273, 2337, 2338, 2339, 2355, 371, 2372, 2379, 2380, 2383); *Guttman Tiberiu* (2373, 2383); *Haret Radu* (2339, 2342); *Mărgineanu Ioan* (2390, 2394); *Opreanu Marcel* (2305, 2310,2312, 2371); *Pali Sergiu* (P; 2220, 2303, 2347, 2396, 2397, 2380, 2387, 2390, 2391); *Plângu Ion* (2381); *Popa C-tin* (2218, 2247, 2387, 2389); *Popa D. Vasile* (P; 1979, 2135, 2150, 2335, 2347, 2352, 2359, 2373, 2374, 2375, 2379, 2380, 2381, 2382, 2383, 2384, 2387, 2390, 2391, 2393, 2396, 2399, 2400, 2401); *Popovici Dan* (2380, 2389, 2390, 2396, 2399, 2400); *Sasu Ion* (P; 2347, 2380, 2384, 2393, 2400, 2401), *Schiopu Ioan* (2335, 2338, 2339, 2345, 2349, 2867, 2391); *Şerengău Mihai* (2094, 2250, 2276, 2347, 2350, 2357, 2360, 2364, 2367, 2371, 2379, 2390, 2393, 2395, 2396, 2401); *Stern Tiberiu* (2389, 2390, 2391); *Teodorescu Petre* (2345, 2847, 2350, 2352, 2353, 2359, 2372 2375); *Titero Ioan* (2300, 2312, 2319, 2325, 2332, 2338 2339, 2342, 2352, 2373, 2374).

Este bine să ştie colaboratorii şi corespondenţii noştrii că un număr tipărit în 500 exemplare ne costă azi 340.000 lei, în afară de zincografie.

ANUL XXVI. APRILIE 1946 No. 2.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIŞOARA

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNII SIBIIU

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 500 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 4000 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 10.000 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **GH. V. NICULESCU**: TRAPEZE PARTICULARE.
2. NOTE MATEMATICE 3, 4, 5.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 1241, 1758, 1869, 1955, 1956, 1959, 1960, 2260.
5. PROBLEME PROPUSE: 2410 - 2417.
6. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timişoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931.

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXVI al „REVISTEI MATEMATICE DIN TIMIŞOARA" este de 4000 (patru mii) lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale, vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Politehnica Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Politehnica Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Politehnica Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXV, de 5000 (cinci mii) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXIV inclusiv, broşate, 5000 lei fiecare.

ANUL XXVI — No. 2. TIMISOARA, APRILIE 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 500 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 4000 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Politehnica Timișoara.

TRAPEZE PARTICULARE

de
Inginer GH. V. NICULESCU
Locot. Comandor în retragere

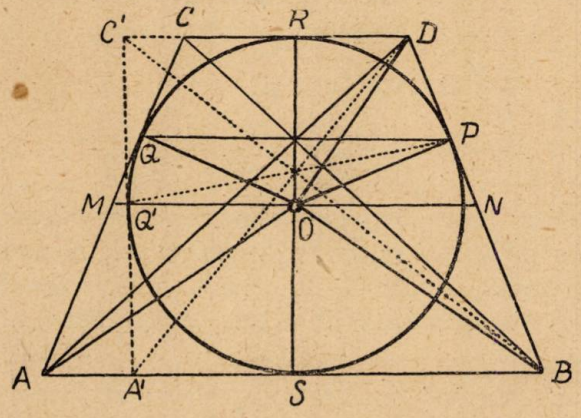
Căutând dacă în afară de pătrat și romb mai sunt patrulatere uzuale circumscriptibile, adică cari să aibă bisectoarele celor 4 unghiuri concurente în același punct, am găsit soluții la trapezele isoscele și la cele dreptunghice. Incepem cu primele.

1. Trapezele isoscele. Presupunând problema rezolvată, fie $ABCD$ un trapez isoscel circumscris cercului O de diametru d și în care notăm baza mare $AB = B$, baza mică $CD = b$, laturile neparalele, $AC = BD = c$ iar înălțimea trapezului $RS = d = i$. Urmărind figura observăm că:

a) Centrul O al cercului se găsește la întretăierea bimedianelor MN și RS;

b) Bisectoarele OA și OC sunt perpendiculare una pe alta în O și de-asemenea bisectoarele OB și OD;

c) Dacă în vârfurile trapezului ducem perpendiculare pe bisectoare se obține un patrulater inscriptibil și cu diagonalele ortogonale punctul lor de întâlnire fiind chiar centrul O al cercului;



d) Patrulaterul $PRQS$ are vârfurile pe cerc și diagonale ortogonale.

In acest trapez, avem relația:

$$(1) \qquad c = MN = (B + b) : 2$$

care reprezintă chiar condiția esențială ca trapezul să fie circumscriptibil, relație din care se mai deduc următoarele:

$$(2) \quad B \times b = i^2 \qquad (3) \quad 4c^2 = B^2 + b^2 + 2i^2$$

$$(4) \qquad B > c > i > b$$

In privința construcției acestui trapez special, dacă se dă cercul O de diametrul $d = i$, atunci găsim o infinitate de soluții; dacă însă se dau două oarecari din elementele lui: B, b, c, i, atunci construcția este definită. De pildă dacă îl construim cu elementele c și i, rezolvând sistemul format cu ecuațiunile (1) și (2), obținem soluțiile:

$$5) \qquad B, b = c \pm \sqrt{c^2 - i^2}$$

cari asociate primelor date, permit construcția.

Descrierea diferitelor construcții, ce putem face cu două oarecari din elementele trapezului, n'o facem, neprezentând dificultăți.

Intre diferite elemente ale acestui trapez și păstrând aceleași notațiuni, se obțin relațiunile următoare, punând, $B' = A'B$ și $b' = C'D$:

$$(1') \qquad B' + b' = c + i$$

care reprezintă condițiunea ca trapezul să fie circumscriptibil cercului O, relație în care înălțimea i joacă rolul laturei $A'C' = RS = i$, și cele ce rezultă din (1'):

$$(2') \qquad i = \frac{2B'b'}{B' + b'} \qquad (2'') \quad c = \frac{B'^2 + b'^2}{B' + b'}$$

$$(3') \qquad c^2 = i^2 + (B' - b')^2 \qquad (4') \quad B' > c > i > b'$$

$$(5') \qquad B', b' = \frac{c + i \pm \sqrt{c^2 - i^2}}{2}$$

formule cari asigură construcția trapezului dându-se

două oarecari din elementele lui: B', b', c şi i. Şi pentru acest trapez vom propune aceiaşi problemă de construcţie:

Să se construiască un trapez dreptunghic circumscriptibil dându-se lungimea laturei oblice c şi distanţa q între punctele de contact ale cercului cu laturile neparalele.

Incepem rezolvarea problemei prin calculul lui q, utilizând patrulaterul inscriptibil $PRQ'S$ în care $Q'P = q$ este una din diagonale.

Laturile PR şi PS le calculăm în patrulaterele $OPDR$ şi $OPBS$ observând că avem:

$$RD = PD = b' - \frac{i}{2} \quad \text{şi} \quad PB = BS = B' - \frac{i}{2}.$$

Rezultatul acestui calcul se concentrează în ecuaţia:

$$i^3 + c\,i^2 - 2\,q^2 c = 0$$

care ne dă valoarea lui i în funcţie de elementele q şi c date în problemă.

Urmează construcţia: La cercul O de diametru $d = i$ ducem tangentele paralele de direcţii $A'B$ şi $C'D$. In Q' ducem tangenta $A'C'$. Cu piciorul compasului în Q' descriem arcul de cerc de rază $Q'P = q$, ce taie cercul O în P, unde ducem tangenta BD, construcţia fiind terminată. Pentru a obţine soluţii trebuie să luăm:

$$i\frac{\sqrt{2}}{2} < q < i.$$

Pentru valoarea particulară: $q = i\frac{\sqrt{3}}{2}$ obţinem:

$$B' = \frac{3+\sqrt{3}}{2}i \quad ; \quad b' = \frac{3-\sqrt{3}}{2}i \quad ; \quad c = 2i$$

adică: *când distanţa q este cât latura triunghiului echilateral înscris în cercul O, atunci latura oblică c este dublul laturei perpendiculare: $c = 2i$.*

Din ecuaţia de gradul al 3-lea în i scoatem valoarea:

$$q = i\sqrt{c+i} : \sqrt{2c} = 2B'b' : \sqrt{(B'^2 2 + b'^2)}.$$

Din (1') şi (2') eliminăm pe i. Am obţinut două relaţii ce permit o nouă soluţie a construcţiei propuse aci

Inainte de încheiere mai arătăm o simplă proprietate, anume:

Voi propune totuşi o construcţie ce-o cred mai puţin obicinuită:

Să se construiască un trapez isoscel circumscriptibil, dându-se latura neparalelă c şi distanţa p între punctele de contact ale cercului cu laturile neparalele.

Pentru a rezolva problema vom calcula distanţa p. Calculul acestei distanţe se face fie folosind asemănarea triunghiurilor, după prelungirea până la întâlnirea lor a laturilor neparalele AC şi BD; fie folosind patrulaterul inscriptibil $PRQS$, în care distanţa $PQ = p$ este una din diagonale şi aplicând teorema lui *Ptolomeu*. Laturile PR şi PS le calculăm din patrulaterele inscriptibile $OPDR$ şi $OPBS$. Calea din urmă e mai lungă.

Rezultatul acestui calcul este:

$$p = PQ = \frac{2Bb}{B+b} = \frac{i^2}{c} \quad ** \quad p \times c = i^2 = B \times b.$$

Cum p şi c sunt date prin enunţul problemei, rezultă construcţia lui i, descriind un semicerc de diametru, $p + c$. Construim apoi cercul de diametru $d = i$ şi ducem direcţiile paralele AB şi CD. Pe direcţia lui AB, de-oparte şi alta a lui S luăm distanţele $p : 2$ din ale căror extremităţi ridicăm perpendiculare pe AB ce taie cercul în P şi Q, puncte de contact în cari ducem tangentele AC şi BD la cerc, problema fiind astfel terminată. Să examinăm două cazuri particulare. Primul pentru valoarea: $p = i\frac{\sqrt{2}}{2}$, rezultând pentru B, b şi c valorile:

$$B = i(\sqrt{2}+1) \; ; \; b = i(\sqrt{2}-1) \; ; \; c = i\sqrt{2},$$

adică: *Când distanţa p este cât latura patratului înscris în cercul O, atunci latura neparalelă c este dublul acestei distanţe, $2p = c$.*

Al 2-lea caz particular este pentru valoarea $p = i\frac{\sqrt{3}}{2}$ când obţinem şi

$$B = i\sqrt{3}, \; b = \frac{i}{\sqrt{3}}, \; c = \frac{2i}{\sqrt{3}},$$

adică: *Când distanţa p este cât latura triunghiului echilateral înscris în cercul O atunci raza mare a trapezului este dublul acestei distanţe: $B = 2p$, iar latura neparalelă c este dublul bazei mici: $c = 2b$.*

2. Trecând acum la trapezele dreptunghice, considerăm figura $A'BC'D$ care corespunde unui trapez dreptunghic şi la care observăm:

a′) Că centrul O se obţine dându-se sau cercul sau diametrul lui i;

b′) Perpendicularitatea în punctul O a bisectoa-OA′ şi OC′ precum şi a bisectoarelor OB şi OD se menţine.

c′) Ducând perpendiculare pe bisectoare în vârfurile trapezului obţinem un patrulater inscriptibil, cu diagonalele întretăindu-se în centrul O al cercului, dar cari nu mai sunt diagonale.

d′) Şi patrulaterul inscriptibil PRQ′S pierde ortogonalitatea diagonalelor.

Cercetând figura vedem că diagonalele acestor trapeze şi cu dreptele ce unesc punctele de contact — sunt respectiv concurente, proprietate adevărată la orice patrulater circumscriptibil, ca un caz particular al teoremii lui *Brianchon*.

S'a observat că la trapezul dreptunghic am utilizat pentru baze litere accentuate. Intr'adevăr înălţimea i şi latura neparalelă c rămân aceleaşi la ambele trapeze în ipoteza că sunt circumscrise aceluiaş cerc de diametru $d = i$, pe când bazele se schimbă. Ele sunt legate prin relaţiile:

$$B = 2B' - i \quad ; \quad b = 2b' - i$$

ce se vor utiliza la nevoie. Dacă n'am fi utilizat litere accentuate, am fi putut confunda valoarea lui $p = \frac{2Bb}{B+b}$ din trapezul isoscel cu aceia din (2′) a lui $i = \frac{2B'b'}{B'+b'}$ din trapezul dreptunghic.

Am studiat aceste cazuri elementare şi particulare cu credinţa că ele n'au mai interesat pe alţi cercetători şi pentru a le alătura patratului şi rombului, fiind împreună cu acestea singurele patrulatere *uzuale* circumscriptibile. In ceace priveşte patrulaterele circumscriptibile *oarecari*, ele se obţin printr'o construcţie cu mult mai uşoară şi mai expeditivă decât la cazurile particulare expuse mai sus. Căci este suficient ca să proiectăm punctul de întâlnire al diagonalelor unui patrulater inscriptibil pe laturile lui, ca să obţinem totdeauna vârfurile unui patrulater circumscriptibil, enunţ ce constituie o parte dintr'o problemă din F. G. M.

NOTE MATEMATICE

3. — *Quelques égalités multigrades.* Étant donnée la multigrade

$$a, a \overset{2,4}{=} c, d, c+d,$$

on en déduit

(1)
$$\begin{array}{|cccc|} \hline 3a, & 3a, & 2d-a, & 2c+2d-a \overset{1,3,5}{=} \\ a-2c & a+2c, & a+2d, & a+2c+2d \\ \hline \end{array}$$

et

(2)
$$\begin{array}{|l|} \hline 3a+c, 3a+c, a+c, 3c-a, -a+3c+2d, -a+c-2d \overset{2,4,6}{=} \\ 3a-c, 3a-c, a-c, a+3c, a+3c+2d, a+c-2d \\ \hline \end{array}$$

Pour démontrer l'égalité (1) on applique à la multigrade donnée le théorème:*)

„D'une multigrade

$$a_1, a_2, \ldots a_p \overset{X}{=} b_1, b_2, \ldots b_p$$

vraie pour $X = 2, 4 \ldots 2n$, on déduit la suivant:

$$a_1+t,\ a_2+t,\ \ldots a_p+t,\ -a_1+t,\ -a_2+t,\ \ldots -a_p+t \overset{y}{=}$$
$$b_1+t,\ b_2+t,\ \ldots b_p+t,\ -b_1+t,\ -b_2+t,\ \ldots -b_p+t$$

vraie pour $y = 1, 2 \cdots 2n, 2n+1$, quelle que soit la valeur de t".

Ou fera $t = \frac{a}{2}$ et on supprimera à l'intérieur de chaque membre les termes opposés, l'égalité obtennue ne subsistera plus qu'aux degrès impairs 1, 3, 5.

Pour démontrer l'égalité (2), on applique à (1) le théoréme**).

„De la multigrade

$$a_1, a_2, \ldots a_p \overset{X}{=} b_1, b_2, \ldots b_p$$

vraie pour $X = 1, 3 \cdots 2n-3, 2n-1$, on déduit la suivante

$$a_1+t,\ a_2+t, \cdots a_p+t,\ -b_1+t,\ -b_2+t, \cdots -b_p+t \overset{y}{=}$$
$$-a_1+t, -a_2+t, \cdots a_p+t,\ b_1+t,\ b_2+t, \cdots\ b_p+t$$

vraie pour $y = 1, 2 \cdots 2n-1,\ 2n$, quelle que soit la valeur de t".

On posera ici $t = c$. En supprimant les nombres opposé dans les deux membres, il reste une égalité vraie aux degrés 2, 4, 6.

---

*) Sur les égalités multigrades, pag. 18, par *A. Gloden.*
**) Ouvrage cité, page 18.

Exemples numériques.

On a

$$7, 7^{2,4} \equiv 3, 5, 8.$$

On en déduit

(1) $$3, 9, 21, 21^{1,3,5} \equiv 1, 13, 17, 23$$

$$S_1 = 54; \quad S_3 = 19.278; \quad S_5 = 8.227.494$$

et

$$1, 5, 6, 7, 12, 12^{2,4,6} \equiv 2, 8, 9, 9, 13$$

$$S_2 = 399; \quad S_4 = 45.795; \quad S_6 = 6.151.899.$$

A. GLODEN

Asupra problemei 2265.

4. — In cele ce urmează ne propunem a da o soluție acestei probleme mai simplă decât aceea publicată la pagina 142, „R. M. T" An. XXV, Nr. 12; soluția noastră dând soluții pe aceeaș cale pentru problema generalizată.

Fie N numărul al cărui patrat se termină cu acest număr, adică pentru care avem

(1) $$N^2 - N = 10^n . N_1$$

n fiind numărul cifrelor lui N.

Observând că N(N—1) are factori N și N—1 primi între ei, rezultă că vom obține soluții ale problemii luând

(2) $$N = 2^n . p \text{ și } N - 1 = 5^n . q \qquad (p . q = N_1)$$

sau

(3) $N = 5^n . p$ și $N - 1 = 2^n . q$, p și q primi între ei.

Dacă plecăm dela relația (2) avem a rezolva în numere întregi egalitatea

(4) $$\boxed{2^n . p = 5^n . q + 1}$$

iar dacă plecăm dela relația (3) avem să rezolvăm în numere întregi egalitatea:

$$5^n . p = 2^n . q + 1$$

sau egalitatea echivalentă

(5) $$\boxed{2^n . q = 5^n . p - 1}$$

Dacă ne limităm la cazul în care căutăm numerele N de n cifre ale căror patrate în condițiile problemei au $2n$ cifre, în acest caz pentru rezolvarea mai simplă va fi nevoie să cunoaștem limita inferioară a lui N, limită care se obține extrăgând rădăcina patrată a numărului 10^{2n-1}, rădăcină care pentru $n=6$ are valoarea aproximativă 31622775002.

1. *Să considerăm acum cazul problemii* $n = 2$.

Ecuația (4) devine în acest caz

(4) $$4p = 25q + 1$$

în care q trebue astfel determinat ca partea a doua a ecuației să fie divizibilă cu 4, deci

$25q + 1 \equiv 0 \pmod 4$, sau $q + 1 \equiv 0 \pmod 4$;

iar de altă parte

$$31 \leqq 25q + 1 < 4 \times 25 \qquad (31 \leqq N < 100)$$

sau încă

(6) $$1 < q < 4.$$

Singurul număr întreg $q \equiv -1 \pmod 4$ cuprins în condițiile (6) este $q = 3$, deci

$$N = 25q + 1 = 76 \qquad (76^2 = 5776)$$

b) Tot pentru $n = 2$, ecuația (5) devine

(5) $$4q = 25p - 1,$$

deci având

$$25p - 1 \equiv p - 1 \pmod 4.$$

trebue să să luăm

(7) $$p \equiv 1 \pmod 4.$$

De altă parte trebue să avem

$$31 < 25p < 100$$

deci

$$1 < p < 4$$

sau $p = 2, 3$, dar nici una din aceste valori nu satisface congruenta (7).

Așadar, pentru $n = 2$ avem o singură soluție $76^2 = 5776$, care răspunde problemii.

2. *Să considerăm acum* $n = 3$.

a) Ecuația (4) devine

(4) $$8p = 125q + 1.$$

Observând că $125q + 1 \equiv 5q + 1 \pmod 8$, trebue să determinăm pe q astfel ca

(8) $$5q + 1 \equiv 0 \pmod 8.$$

De altă parte trebue să luăm pe q astfel ca

$$316 < 5^3 q + 1 < 5^3 . 2^3$$

sau

$$315 < 5^3 . q < 5^3 . 2^3 - 1$$

sau încă

$$2 < q < 8, \quad \text{sau} \quad 10 < 5q < 40.$$

Urmează deci să luăm valoarea întreagă a lui q cuprinsă între 2 și 8, astfel ca

$$5q \equiv -1 \pmod 8 \tag{9}$$

Singura valoare (impară) a lui q pentru care avem congruența (9) satisfăcută este $q = 3$, deci $N = 376$ ($376^2 = 141376$).

b) Ecuația (5) devine

$$8q = 125p - 1 \tag{5}$$

deci trebue să luăm pe p astfel ca

$$5p \equiv 1 \pmod 8 \tag{10}$$

Dar

$$316 < 125p < 5^3 2^3$$

sau

$$2 < p < 8. \tag{11}$$

Singura valoare (impară) a lui p pentru care congruența (10) este compatibilă cu condiția (11) este $p = 5$, deci $N = 625$

$$\boxed{625^2 = 390625}.$$

Deci în acest caz problema are două soluții:

$$N^2 = 376^2 \text{ și } N^2 = 625^2.$$

Pentru cazul $n = 4$, procedând in același fel, găsim o singură soluție dată de ecuația (4), anume

$$\boxed{9376^2 = 87909376}.$$

Pentru cazul $n = 5$, găsim deasemenea o singură soluție dată de ecuația (5), anume

$$90625^2 = 8212890625.$$

Și așa mai departe.

OVIDIU ȚINO

5. — *Asupra unei probleme de examen.*

La examenul de Analiză matematică dela Școala Politehnică din București, în sesiunea Iulie 1945, a fost propusă următoarea problemă:

„Să se afle centrul de greutate a unei plăci plane omogene a cărei formă geometrică este porțiunea din interiorul parabolei $y^2 = 2px$ și prima bisectoare a axelor“.

În cele ce urmează îmi propun să dau o extindere acestei probleme în sensul că voiu căuta să rezolv următoarea problemă mai generală:

„Să se afle locul geometric al centrelor de greutate ale unei plăci plane omogene a cărei formă geometrică este porțiunea din interiorul parabolei $y^2 = 2px$ și o dreaptă variabilă ce trece prin vârful parabolei“.

Fie G centrul de greutate, ale cărui coordonate ξ și η sunt date de relația:

$$(1) \quad \xi = \frac{\iint_D x\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy} \quad \text{și} \quad (2) \quad \eta = \frac{\iint_D y\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy},$$

unde D inseamnă domeniul de calcul al integralei duble.

Pentru ușurința calculului, voiu întrebuința coordonatele polare

$$x = \varrho \cos\theta \quad \text{și} \quad y = \varrho \sin\theta,$$

așa încât relațiile (1) și (2), devin:

$$(1') \qquad \xi = \frac{\iint_D \varrho^2 \cos\theta\, d\varrho\, d\theta}{\iint_D \varrho\, d\varrho\, d\theta}$$

și

$$(2') \qquad \eta = \frac{\iint_D \varrho^2 \sin\theta\, d\varrho\, d\theta}{\iint_C \varrho\, d\varrho\, d\theta},$$

iar ecuația parabolei în coordonate polare se poate scrie:

$$\varrho = 2p \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

În cazul problemei generale, ce mi-am propus a o rezolva, domeniul de calcul al integralelor duble, va fi:

$$0 \leq \varrho \leq 2p \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \quad \text{și} \quad \alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

unde α este unghiul variabil ce-l face dreapta ce trece prin vârful parabolei cu axa x-ilor

1. *Calculul integralei* $I_1 = \iint_D \varrho\, d\varrho\, d\theta$.

În baza proprietăților integralelor duble, cunoscând domeniul determinat mai sus, avem:

$$I_1 = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2p\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}} \varrho\, d\varrho = 2p^2 \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta}{\sin^4\theta}\, d\theta.$$

Făcând substituţia $\operatorname{tg}\theta = u$ putem uşor calcula această integrală simplă, care ne dă, revenind la vechea variabilă

$$I_1 = -\frac{2p^2}{3}\left|\frac{1}{\operatorname{tg}^3\theta}\right|_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2p^2}{3\operatorname{tg}^3\alpha}.$$

2. *Calculul integralei* $I_2 = \iint_D \varrho^2 \cos\theta\, d\varrho\, d\theta.$

Procedând la fel ca în cazul primei întegrale, avem

$$I_2 = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \int_0^{2p\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}} \varrho^2 d\varrho = \frac{8p^3}{3}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4\theta}{\sin^6\theta}\, d\theta.$$

Făcând substituţia $\operatorname{tg}\theta = u$, integrala ne dă:

$$I_2 = -\frac{8p^3}{3}\cdot\frac{1}{5}\left|\frac{1}{\operatorname{tg}^5\theta}\right|_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8p^3}{15\operatorname{tg}^5\alpha}.$$

3. *Calculul integralei* $I_3 = \iint_D \varrho^2 \sin\theta\, d\varrho\, d\theta.$

$$I_3 = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2p\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}} \varrho^2 d\varrho = \frac{8p^3}{3}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3\theta}{\sin^5\theta}\, d\theta.$$

Întegrala se mai poate scrie

$$I_3 = \frac{8p^3}{3}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin^2\theta)\cos\theta}{\sin^5\theta}\, d\theta.$$

Făcând substituţia $\sin\theta = u$ putem uşor calcula această integrală, care ne dă, revenind la vechea variabilă

$$I_3 = -\frac{8p^3}{3}\left[\frac{1}{4}\left|\frac{1}{\sin^4\theta}\right|_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\left|\frac{1}{\sin^2\theta}\right|_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$= -\frac{8p^3}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\sin^4 a} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sin^2 a}\right) =$$

$$\frac{2p^3}{3}\left(1 - \frac{2}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^4\alpha}\right) = \frac{2p^3\cos^4\alpha}{3\sin^4\alpha} = \frac{2p^3}{3\operatorname{tg}^4\alpha}.$$

Ţinând seamă de relaţiile (1′) şi (2′), obţinem coordonatele centrului de greutate

$$(3) \qquad \xi = \frac{I_2}{I_1} = \frac{8p^3/15\operatorname{tg}^5\alpha}{2p^2/3\operatorname{tg}^3\alpha} = \frac{4p}{5\operatorname{tg}^2\alpha}$$

şi

$$(4) \qquad \eta = \frac{I_3}{I_1} = \frac{2p^3/3\operatorname{tg}^4\alpha}{2p^2/3\operatorname{tg}^3\alpha} = \frac{p}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Observaţie. În cazul particular al problemei date la examen când $\alpha = \frac{\pi}{4}$, rezultă imediat coordonatele $\xi = \frac{4}{5}p$ şi $\eta = p$.

Pentru a determina locul geometric al centrului de greutate, este suficient a elimina parametrul variabil ($\operatorname{tg}\alpha$) în cele două relaţii (3) şi (4). Anume, din relaţia (4) scoatem valoarea lui $\operatorname{tg}\alpha$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{y}$$

pe care întroducând-o în relaţia (3), obţinem

$$x = \frac{4p}{\frac{5p^2}{y^2}} = \frac{4}{5p}y^2.$$

De unde locul geometric este

$$\boxed{y^2 = \frac{5}{4}px}$$

o parabolă, care are vârf comun cu vârful parabolei date.

Problema poate fi şi mai mult extinsă în sensul de a considera în loc de parabolă alte curbe.

CPT. M. GRUMAZESCU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul LI, No. 7, Martie 1946. Raport asupra mersului Societăţii „Gazeta Matematică" pe anul 1945, în Adunarea Generală de la 25 Februarie 1945, de Dr. *Şerban Gheorghiu*, Prof. *P. Sergescu*, Ing. *Al. D. Bunescu*. Asupra unor triunghiuri Γ, de *Gh. D. Simionescu*. Regulamentul premiului de „Istoria Matematicei", de Ing. *I. S. Antoniu*, Dr. *Şerban Gheorghiu*, Ing. *Al. Bunescu*. Raportul Comisiunii pentru premiul de aritmetică, de G-l. *Gh. Buiclu*, Ing. *I. Ionescu*, Prof. *P. Sergescu*. Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. *Dumitru Ion Mangeron:* Matematica în cadrul Istoriei gândirii ştiinţifice şi a Culturii. (Extras din Revista *„Adamache"*, vol. XXXII, 1946).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1241. — *Să se găsească un cub perfect de şapte cifre ştiind că dacă scădem din el inversatul lui căpătăm restul zero. Se ştie încă*

că cifra a patra a numărului cerut este egală cu prima cifră mărită cu a treia şi numărul format din cifra a doua urmată de a treia este un patrat perfect.

TR M. PREDOESCU

Soluţie. Fie

$$N^3 = a\,b\,c\,d\,e\,f\,g$$

cubul căutat. Prima condiţie din enunţ conduce la

(1) $999999\,(a-g) + 99990\,(b-f) + 9900\,(c-e) = 0$

care are loc în numere întregi numai dacă $a-g$ se divide prin 10. Ori aceasta se întâmplă când $a=g$ şi (1) devine după simplificare

(2) $$9999\,(b-f) + 990\,(c-e) = 0,$$

(2) are loc când $b=f$, după care se deduce $c=e$. Deci

$$N^3 = a\,b\,c\,d\,c\,b\,a$$

cu condiţiile

$$d = a + c < 10 \quad \text{şi} \quad 10\,b + c = m^2$$

Numărul $b\,c$ trebue căutat între numerele şirului

(3) 00, 01, 04, 09, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

1°. Fie $b\,c = 00$ $\overset{*}{*}\overset{*}{*}$ $c = 0$ şi deci $d = a$. Deci numărul de 7 cifre de examinat este

$$M = a\,0\,0\,a\,0\,0\,a = a \times 3 \times 333667.$$

Pentru ca M să fie cub trebue ca $a=9$ şi 333667 să fie cub. Ori 333667 este număr prim, ceia ce se poate dovedi împărţindu-l pe rând cu toate numerele prime până la 577 inclusiv.

2°. Să încercăm cu $b\,c = 36$. Avem

$$M = a\,36\,d\,63\,a \quad \text{cu} \quad d = a + c = a + 6,$$

deci $a = 1, 2, 3$ şi $d = 7, 8, 9$, căci $a = 0$ se exclude de oarece $b\,c \neq 00$. Avem de examinat care din numerele

1367631, 2368632 şi 3369633,

este cub perfect.

Găsim prin descompuneri în factori

$1367631 = 3^3 . 37^3 = 111^3$

$2368632 = 2^3 \times 3 \times 98693$, cu $98693 \neq 9m$;

$3369633 = 3^3 \times 12479.$

După cum se vede, numai primul număr este cub, el este deci o soluţie a problemei.

3°. Examinăm pe căi analoage toate celelalte valori ale şirului (2) şi găsim că singura soluţie a problemei este

$$111^3 = 1367631.$$

Problema comportă multe calcule şi încercări.

Au dat soluţia exactă însă examinând un număr restrâns de cazuri D-nii: *Amărăşteanu F. Marcel, Boiangiu I Gh. Cazanacli P., Chiriac Const., Coadă Ion, Godeanu Vasile, Grumăzescu Mircea, Hompola T., Ionescu D-tru, Jidanu I. C., Lupescu Gh. Corneliu, Manea Desideriu, Marteş V. Gr., Milu I Nicolae, Munteanu Ioa, Năstase Marin, Petrescu P. Anastasie, Popa Nicolae, Postelnicescu Mircea, Sâmbotin Gh.* şi *Tică P. Marin.*

G-l Gh. B.

Problema 1758. — *Să se rezolve ecuaţia*

$$sp^4 x + cp^4 = \frac{1}{8}.$$

V. ALACI

Soluţie dată de d-ra *Papadopol Elena* (Lic. Bacău), *Creţa Gavril* (Polit., Timişoara) şi *Vişa Eugen* (Prof. Bucureşti).

Conform teoriei din Trig. patratică, p. 136, ecuaţia dată fiind de forma

(1) $$f(sp^2 x,\ cp^2 x) = 0,$$

dacă ea are o rădăcină α în primul cadran, atunci toate rădăcinele ei sunt de forma

$$x = k\pi \pm \alpha, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Dar dacă x este în primul cadran, se face substituţia

$$sp\,x = t$$

şi ecuaţia dată devine

$$t^4 + (1-t)^4 = \frac{1}{8},$$

sau

(2) $$16\,t^4 - 32\,t^3 + 48\,t^2 - 32\,t + 7 = 0.$$

Punând

$$t = \frac{y}{2},$$

ecuaţia (2) devine

(3) $$y^4 - 4\,y^3 + 12\,y^2 - 16\,y + 7 = 0,$$

care are rădăcina dublă $y=1$, deci se descompune în

$$(y-1)^2 (y^2 - 2\,y + 7) = 0.$$

Cum factorul al 2-lea are rădăcini imaginare, rezultă că ecuaţia (3) are numai rădăcina reală

$$y = 1,$$

prin urmare ecuaţia (2) are numai rădăcina reală

$$t = \frac{1}{2}.$$

Ecuaţia dată, ne dă astfel

$$sp\, x = \frac{1}{2}, \quad \text{deci} \quad x = \frac{\pi}{4}$$

şi conform celor spuse la început, rădăcinele ecuaţiei date sunt

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Observare. D-l Prof. *E. Vişa* a încadrat ecuaţia (2) în tipul de ecuaţii pseudo-bipatrate şi pseudo-reciproce studiate *I. V. Măties,* în revista „Ştiinţa şi Progres", Vol. V, p. 160.

Alte soluţii date de d-nii: *Cazanacli Petre* (Ismail), *Cherţman M.* (Giurgiu), *Jidanu C-tin* (Polit., Timişoara), *Luca I.* (Polit, Timişoara), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Segal Zigu* (Vaslui), *Simon P.* (Arad), *Stanciu Petre* (Polit., Timişoara), *Tincu C-tin* (Polit., Timişoara), *Văduva Marin* (Polit., Timişoara) şi *Vostinaru Gh.*

Problema 1869. — *Pe latura* Ox *a unghiului drept* xOy *se ia punctul fix* A *şi punctul mobil* M, *iar pe latura* Oy *punctul fix* B *şi punctul mobil* N. *Se complectează dreptunghiul* MONP *şi se cere locul lui* P *şi variaţia suprafeţei acestui dreptunghiu când unghiul dreptelor* BM, AN *este constant. Să se examineze cazul particular când* BM *şi* AN *sunt paralele.*

G-L GH BUICLIU

Soluţie. Luăm ca axe de coordonate chiar laturile unghiului xOy şi avem $A(a, 0)$, $M(\lambda, 0)$, $B(0, b)$, $N(0, \mu)$, $P(\lambda, \mu)$. Unghiul, constant al dreptelor BM, AN este dat de

$$\operatorname{tg} V = k = \frac{\lambda\mu - ab}{a\lambda + b\mu}.$$

Eliminând pe λ şi μ între această ecuaţie şi

(2) $$x = \lambda, \quad y = \mu$$

ale dreptelor MP şi NP, se găseşte că locul lui P este iperbola

(3) $$xy - akx - bky - ab = 0$$

Centrul iperbolei (3) este punctul $C(bk, ak)$, iar asimptotele-i sunt paralele cu axele de coordonate. Curba taie axele în punctele $\left(-\frac{a}{k}, 0\right)$, $\left(0, -\frac{b}{k}\right)$.

Fie D intersecţia dreptelor AM, BN. Unghiul acestor drepte fiind constant, punctul D se mişcă numai pe segmentele de arc capabile de acest unghiu şi descris pe coarda AB, de o parte şi de alta a lui AB. Poziţiile punctului D fiind limitate înseamnă că P nu descrie întreaga iperbolă (3). Dacă ducem tangentele în A şi B la cele două segmente de cerc, aceste tangente determină punctele limită M şi N cărora le corespund puncte limită M şi N cărora le corespund puncte limită pe iperbolă. Numai partea de iperbolă cuprinsă între aceste puncte, face parte din loc.

Suprafaţa dreptunghiului MONP este dată de produsul

$$z = k\mu.$$

Înlocuind pe μ prin valoarea scoasă din (1) şi pe λ prin x se obţine

$$z = \frac{ax(kx + k)}{x - kb},$$

sau

$$akx^2 - zx + abx + kbz = 0$$

care reprezintă o iperbolă cu axele x şi z. Construind iperbola, avem variaţia lui z. Iperbola trece prin origină şi are asimptotele paralele cu axele.

Dacă se ia derivata lui z, atunci următorul tabel obţinut pe cale algebrică, dă variaţia lui z

x	0		kb		$2kb$		$+\infty$
z'	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
z	0 ↘		$-\infty \mid +\infty$ ↘		Min. $2ab(2k^2+1)$	↗	$+\infty$

Când AM || BN unghiul V este nul şi din (1) se obţine ca loc iperbola echilateră

$$xy = ab.$$

Au dat soluţii bune d-nii: *Bakonyi C.* şi *Wegener Eugen.*

Problema 1955. — *Să se discute şi să se rezolve sistemul*)*

$$\begin{cases} x + a^2 y - 2az = 1 \\ a^2 x - 2ay + z = -2a \\ -2ax + y + a^2 z = a^2, \end{cases}$$

a fiind real.

CORNELIA NANES

Soluţie. Determinantul sistemului este

*) Enunţ complectat.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & a^2 & -2a \\ a^2 & -2a & 1 \\ -2a & 1 & a^2 \end{vmatrix}$$

Adunând la elementele primei coloane, elementelor celorlalte coloane, avem succesiv

$$\Delta=(a-1)^2\begin{vmatrix} 1 & a^2 & -2a \\ 1 & -2a & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix}=(a-1)^2(-2a^2-2a+a^2-4a^2-1-a^4)=-(a-1)^2(a^2+a+1)^2.$$

Se observă că singura valoare reală a lui a care anulează pe Δ este $a=1$. Vom considera deci două cazuri:

1°. *Cazul* $a\neq 1$. In acest caz sistemul dat este compatibil şi sistemul de soluţii este

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad z=\frac{\Delta_3}{\Delta},$$

unde

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & a^2 & -2a \\ -2a & -2a & 1 \\ a^2 & 1 & a^2 \end{vmatrix}=(a-1)^2\begin{vmatrix} a^2 & 1 & a^2 \\ -2a & -2a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-1)^2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -(2a+1) & 1 \\ a^2-1 & -(a^2-1) & a^2 \end{vmatrix}$$

$$=(a-1)^2(a^2-1)(2a+1);$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2a \\ a^2 & -2a & 1 \\ -2a & a^2 & a^2 \end{vmatrix}=a(a-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2a \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & a & 1 \end{vmatrix}=a(a-1)^2(a-2a^2-2-4a-a-a)$$

$$=-a(a-1)^2(2a^2+5a+2)=-a(a-1)^2(2a+1)(a+2);$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & a^2 & 1 \\ a^2 & -2a & -2a \\ -2a & 1 & a^2 \end{vmatrix}=a(a-1)^2\begin{vmatrix} 1 & a^2 & 1 \\ a & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=a(a-1)^2(-2+a-2a^2+2+2-a^3)$$

$$=-a(a-1)^2(a^3+2a^2-a-2)=-a(a-1)^2(a+2)(a^2-1).$$

Sistemul efectiv de soluţii (1) devine

$$(1')\qquad \begin{cases} x=\dfrac{(1-a^2)(2a+1)}{(a^2+a+1)^2} \\ y=\dfrac{a(a+2)(2a+1)}{(a^2+a+1)^2} \\ z=\dfrac{a(a+2)(a^2-1)}{(a^2+a+1)^2}. \end{cases}$$

2°. *Cazul* $a=1$. In acest caz sistemul devine

$$(2)\qquad \begin{cases} x+y-2z=1 \\ x-2y+z=-2 \\ -2x+y+z-1 \end{cases}$$

Determinantul minor

$$\delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-3\neq 0$$

este determinantul principal.

Determinantul caracteristic corespunzător este

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Pentru $a=1$ sistemul este compatibil, dar nedeterminat.

In adevăr, primele două ecuaţii din (2) ne dau

$$(2')\qquad \begin{cases} y=1+z \\ x=z \end{cases}.$$

Soluţii date de d-nii: *Bakony C.*, (Polit., Timişoara), *Chiriac C-tin*, *Dobrescu Eugen* (Lic. Milit, Timişoara), *Giurconiu Mihai*, *Gâţă Gh.* (Lic. Tg Jiu), *Ghimuş D.* (Lic. Lazăr Bucureşti), *Godea Ioan*, *Grozescu Liviu* (Lic. Beiuş), *Iacob Şt Eugen* (Cpt.), *Kinsky Ioan* (Polit. Timişoara), *Luca I Ioan* (Polit., Timişoara), *Manolache Mircea* (Lic. Internat, Iaşi), *Mahrenholz Johannes*, *Popescu Adrian* (Pol. Timişoara), *Popescu Barbu*, *Preda D-tru* (Lic, Slatina), *Tincu C-tin* (Polit., Timişoara), *Vicol Aurel* (Lic. Piatra-Neamţ) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 1956. — *Să se determine a astfel ca polinomul*

$$x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + a$$

să fie un patrat perfect.

ALEXANDRU TATARU

Soluție. Rădăcina patrată a polinomului dat este evident de forma

$$x^2 + \alpha x + \beta$$

și trebuie să avem

$$x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + a \equiv (x^2 + \alpha x + \beta)^2,$$

sau

$$x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + a \equiv x^4 + 2\alpha x^3 + (\alpha^2 + 2\beta)x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2.$$

Din identificarea coeficienților acelorași puteri ale lui x, deducem

$$\begin{cases} 2\alpha = -4 \\ \alpha^2 + 2\beta = 10 \\ 2\alpha\beta = -12. \\ \beta^2 = a \end{cases}$$

Din prima relație deducem $\alpha = -2$, care substituită în a 2-a dă $\beta = 3$.

Aceste valori verifică relația 3-a, iar a 4-a relație ne dă

$$a = 9.$$

Prin urmare pentru $a = 9$ polinomul dat este un patrat perfect și anume este patratul lui

$$x^2 - 2x + 3.$$

Soluții date de d-ra *Popescu Maria* (Bucureșri) și de d-nii *Anton Ioan* (Lic. Beiuș), *Bakonyi C.* (Polit., Timișoara), *Boleanțu L.*, *Brânceni-Iliescu Bogdan* (Lic. Lazăr, București), *Călin I. Brânceni* (Lic. Lazăr, București), *Chiriac C-tin* (Marina Regală), *Coțiu Aurel*, *Cristea Viorel* (Lic. Arad), *Deheleanu Gh.* (Polit., Timișoara), *Dobrescu Eugen* (Lic. Piatra-Neamț), *Enache Ion* (Lt), *Enăchescu Ion* (Liceul Militar Timișoara), *Filip Petre* (Lic. Câmpina), *Gâță Gh.* (Lic. Tg.-Jiu), *Gligor Ioan* (Șc. Of. de Rez. Art., Craiova) *Giurconiu Mihail* (Lic. Tg-Jiu), *Godea Ioan*, *Goga Florian*, *Ghimuș D.* (Lic. Lazăr, București), *Iacob Eugen* (Cpt), *Ieșan Alexandru* (Lic. Matei Basarab, București), *Ionescu Petre* (Colegiul „Carol I", Craiova), *Iosifescu Cicerone* (Lic. Piatra-Neamț), *Kinski Ioan* (Timișoara), *Luca Ioan* (Arad), *Luca Laurențiu* (Arad), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Manolache Mircea* (Lic. Internat, Iași), *Morariu Iulian* (student, Timișoara) *Pat Moise* (Lic. Beiuș), *Pop Emil* (Polit., Timișoara), *Popescu Adrian* (Polit., Timișoara), *Popescu-Barbu*, *Preda D-tru* (Lic. Slatina), *Rothenștein Bernhard* (Timișoara), *Sârbu Emil* (Polit., București), *Săruleșteanu Emanoil* (București), *Șipoș Eugen* (Polit., Timișoara), *Staicu C-tin* (Lic. Milit., Cernăuți), *Stanciu Petru* (Timișoara), *Tincu C-tin* (Lic. Loga, Timișoara), *Turicu Octavian* (Lic. Arad), *Țifescu Bogdan* (Lic. Piatra Neamț), *Vicol Aurel* (Liceul Piatra-Neamț), *Zavata Victor* (Lic. Piatra-Neamț) și *Wegener Eugen* (București).

Problema 1959. — *Să se arate că dacă*

$$a \sin x \sin(z-y) + b \sin y (x-z) + c \sin z \sin(y-x) = 0,$$

atunci

$$\frac{(a-b)^2}{\sin z \sin(y-x)} + \frac{(b-c)^2}{\sin x \sin(z-y)} + \frac{(c-a)^2}{\sin y \sin(x-z)} = 0.$$

MARIA NEUMANN

Soluție dată de d-nii *Chiriac C-tin* (Lt) și *Gloden A.* (Luxemburg).

Notând respectiv cu r, m, n numitorii fracțiilor trebuie să arătăm că avem

$$(1) \qquad \frac{(a-b)^2}{r} + \frac{(b-c)^2}{m} + \frac{(c-a)^2}{n} = 0,$$

atunci când

$$(2) \qquad a\,m + b\,n + c\,r = 0.$$

Aducând la același numitor și notând cu E primul membru al relației (1) putem scri

$$E = \frac{(a-b)^2 m n + (b-c)^2 r n + (c-a)^2 m r}{m n r}$$

Dezvoltând și regrupând avem

$$(3) \quad \begin{aligned} m n r E = {} & a^2 m(n+r) + b^2 n(m+r) + c^2 r(m+n) \\ & - a m(b n + c r) - b n(a m + c r) - c r(a m + b n) \end{aligned}$$

Cum din (2) deducem

$$b n + c r = -a m, \quad a m + c r = -b n, \quad a m + b n = -c r,$$

relația (3) devine

$$(4) \qquad m n r E = (m + n + r)(a^2 m + b^2 n + c^2 r)$$

Cum însă

$$\begin{aligned} m &= \sin x \sin(z-y) = \sin x \sin z \cos y - \sin x \cos z \sin y \\ n &= \sin y \sin(x-z) = \sin y \sin x \cos z - \sin y \cos x \sin z \\ r &= \sin z \sin(y-x) = \sin z \sin y \cos x - \sin z \cos y \sin x, \end{aligned}$$

adunând rezultă

$$m + n + r = 0$$

și cum

$m\,n\,r \neq 0$, iar $a^2 m + b^2 n + c^2 r$ este finit, din (4) resultă

$$E = 0,$$

ceeace trebuia stabilit.

Alte soluţii date de d-nii: *Enăchescu Ion* (Lic. Milit., Timişoara), *Grozescu Liviu* (Polit., Timişoara) şi *Mahrenholz Johannes* (Cottbus).

Problema 1960. — *Să se stabilească inegalitatea*

$$r_a \sin\frac{A}{2} + r_b \sin\frac{B}{2} + r_c \sin\frac{c}{2} < p \sec\frac{A}{2} \sec\frac{B}{2} \sec\frac{C}{2} + r.$$

IONEL I. STAMATE

Soluţie. Fiindcă unghiurile $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}$ sunt mai mici ca 90^0, rezultă

$$\sin\frac{A}{2} < 1,\ \sin\frac{B}{2} < 1,\ \sin\frac{C}{2} < 1$$

şi atunci avem evident

(1) $$r_a \sin\frac{A}{2} + r_b \sin\frac{B}{2} + r_c \sin\frac{C}{2} < r_a + r_b + r_c.$$

Pe de altă parte

$$R = \frac{p}{4 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}}$$

(Compléments de Trigonométrie, par „F.G.M." p. (174), de unde

(2) $$p \operatorname{cosec}\frac{A}{2} \operatorname{cosec}\frac{B}{2} \operatorname{cosec}\frac{C}{2} + r = 4R + r.$$

Dar,

$$4R + r = r_a + r_b + r_c,$$

Compléments de Trig. par „F.G.M.", p. 178). astfel că (2) ne dă

$$r_a + r_b + r_c = p \operatorname{cosec}\frac{A}{2} \operatorname{cosec}\frac{B}{2} \operatorname{cosec}\frac{C}{2} + r.$$

In virtutea acestei relaţii inegalitatea stabilită (1) devine

$$r_a \sin\frac{A}{2} + r_b \sin\frac{B}{2} + r_c \sin\frac{C}{2} < p \operatorname{cosec}\frac{A}{2} \operatorname{cosec}\frac{B}{2} \operatorname{cosec}\frac{C}{2} + r,$$

ceeace era de dovedit.

Soluţii date de d-nii: *Bakonyi C.* (Polit Timişoara), *Enăchescu Ion* (Liceul Milit., Timişoara), *Gligor Ion* (student, Timişoara), *Gloden A.* (Luxemburg), *Ionescu Petre* (Craiova), *Luca Ioan* (Polit., Timişoara), *Popescu Adrian* (Polit., Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti)

Problemă 2260. — *Să se calculeze maximul produsului*

$$P = x^5 y^7 z^9$$

ştiind că avem

$$x y^2 + y z^3 + z^4 x^5 = a \qquad (a \text{ constant})$$

AL. TIGANOIU

Soluţie. Folosim următoarea teoremă*) *Dacă* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *sunt nişte cătimi pozitive variabile, dacă* $a_1, a_2, \cdots, a_n;\ b_1, b_2, \cdots b_n; \cdots;\ l_1, l_2, \cdots; l_n;\ m_1, m_2, \cdots, m_n$ *sunt nişte numere algebrice pozitive, unele putând fi nule şi dacă suma*

$$A_1 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots a_n^{a_n} + A_2 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \cdots x_n^{b_n} + \cdots + A_n x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_n^{l_n} = a = ct.,$$

atunci produsul

$$P = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$$

este maxim, când avem

$$\frac{A_1 x_1^{a_1} x_2^{b_2} \cdots x_n^{a_n}}{\begin{vmatrix} m_1 & b_1 & \cdots & l_1 \\ m_2 & b_2 & \cdots & l_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ m_n & b_n & \cdots & l_n \end{vmatrix}} = \frac{A_2 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \cdots x_n^{b_n}}{\begin{vmatrix} a_1 & m_1 & \cdots & l_1 \\ a_2 & m_2 & \cdots & l_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_n & m_n & \cdots & l_n \end{vmatrix}} = \cdots = \frac{A_n x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_n^{l_n}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & m_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & m_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_n & b_n & \cdots & m \end{vmatrix}},$$

iar maximul lui P *este:*

(1) $$\max P = \sqrt[\Delta]{\left(\frac{\Delta_1}{A_1}\right)^{\Delta_1} \left(\frac{\Delta_2}{A_2}\right)^{\Delta_2} \cdots \left(\frac{\Delta_n}{A_n}\right)^{\Delta_n}} \left(\frac{a}{\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n}\right)^{\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots \Delta_n},$$

---

*) *V. Alaci: Aflarea directă a maximului unui produs şi a minimului unei sume.* Articol publicat în „R. M. T.", An IV No. 6.

unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & l_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_n & b_n & \cdots & l_n \end{vmatrix},$$

iar Δ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *se obține din* Δ, *înlocuind elementele coloanei de rangul i respectiv prin*

$$m_1, m_2, \ldots, m_n.$$

In cazul nostru avem

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 34, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 7 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 80$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 9 & 4 \end{vmatrix} = 78, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 18.$$

Acum, conform formulei (1), maximul căutat este

$$\max P = \sqrt[34]{80^{80} \cdot 78^{78}\, 18^{18} \left(\frac{a}{176}\right)^{176}} = \sqrt[17]{80^{40} \cdot 78^{39} \cdot 18^{9} \left(\frac{a}{176}\right)^{88}}.$$

Soluții date de d-nii: *Birănaș Ioan* (Polit., Timișoara), *London Emeric* (Polit., Timișoara), *Stanciu Petre* (Polit., Timișoara), și *Wegener Eugen* (București).

PROBLEME PROPUSE

2410. — Să se găsească patratul de trei cifre, la care sporind toate cifrele cu 2 se obținem un cub perfect.

ILIE CONSTANTINESCU

2411. — Să se rezolve în numere întregi ecuația

$$x^2 = y^2 + z^3.$$

G. L. GH. BUICLIU

2412. — Dacă ecuația $f(x) = 0$ are toate rădăcinele reale și ecuația

$$f^{(n-1)}(x) + (a+b) f^{(n)}(x) + a\,b\, f^{(n+1)}(x) = 0$$

are toate rădăcinele reale.

RADU FRUNZA

2413. — Se dau funcțiile

$$y = \operatorname{arc\,tg} \frac{\log x + e^x}{\log x - e^x} \quad \text{și} \quad z = \operatorname{arc\,tg} \frac{e^x}{\log x}.$$

Să se arate că ele au aceiași derivată.

SERGIU PALI

2414 — Să se verifice pentru $0 \leq x \leq 1$ identitatea

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{x + 2\sqrt{x} - 7}{x - 6\sqrt{x} + 1} - 2\left(\operatorname{arc}\, Sp \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \sqrt{x}\right) = 2\left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

unde *Sp* este secanta patratică.

MIHAI GIURCONIU

2415. — Fie două poligoane $P_1 \equiv A_1 B_1 C_1 \ldots$ și $P_2 \equiv A_2 B_2 C_2 \ldots$, invers omotetice cu un alt poligon $P \equiv A\,B\,C \ldots$, față de același centru de omotetie.

Dacă dreptele $A\,B_2$ și $A_1 B$ sunt paralele aria poligonului P este medie geometrică ale ariilor poligoanelor P_1 și P_2.

ANDREI DOBRESCU

2416. — Se dă triunghiul dreptunghic $B\,A\,C$ $(A = 90^0)$. Mediana din A întâlnește perpendiculara din B pe BC în F; iar paralela din C la mediana din A întâlnește în G înălțimea din A. Să se arate că:

1°. F G este paralelă cu A B.

2°. Patrulaterul A B F G este un paralelogram și să i se calculeze suprafața.

3°. Considerând B mobil, să se afle locul geometric al proecției vârfului C pe mediană și locul geometric al intersecției acestei perpendiculare din C cu înălțimea unghiului drept.

GH. GOLDIS

2417. — Într'un triunghiu, în care notațiile sunt cele obicinuite, să se verifice relațiile

$$(a+c)\cos\frac{B}{4} + b\cos\left(A + \frac{3B}{4}\right) = 2c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{4},$$

$$b = \left(a + c + 2c\cos\frac{B}{2}\right)\cos C + 4c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{4}\cos\left(A + \frac{3B}{4}\right).$$

V. ALACI

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Balaniscu Chirică (2390, 2391, 2406); *Birănaş Ioan* (P; 2126, 2215, 2292, 2350, 2358, 2362, 2364, 2366, 2375, 2379, 2380, 2383, 2384, 2388, 2390, 2391, 2392, 2393, 2395, 2399, 2400, 2401); *Boerescu G.* (N; P.); *Bonea Anton* (2405); *Ciucurel Emilian* (2402, 2403, 2406, 2408, 2409); *Coman Liviu* (2396, 2403); *Constantin C-tin* (P; 2360); *Constantinescu Ilie* (P; 2283, 2323, 2341, 2347, 2348, 2350, 2362, 2364, 2366, 2368, 2373, 2375, 2379, 2380, 2383, 2384, 2387, 2390, 2391, 2393, 2394, 2395, 2396, 2399, 2400, 2401, 2402, 2403, 2404, 2406, 2407, 2408, 2409); *Coţiu Aurel* (P; 2210, 2233, 2250, 2366, 2387, 2389, 2389, 2391, 2396, 2399, 2400, 2401); *Cristea Mircea* (P; 2396, 2399, 2400, 2401); *Frunză Radu* (2404, 2405, 2407, 2409); *Gaicu Alexandru* (2403, 2404, 2405, 2406); *Gligor Ioan* (2392, 2393, 2406, 2407, 2409); *Giurconiu Mihai* (P; 2338, 2339, 2342, 2363, 2364, 2367, 2371, 2380, 2381, 2382, 2383, 2384, 2386, 2387, 2389, 2390, 2391, 2393, 2395, 2396, 2400, 2401, 2403, 2405, 2406); *Ghiţescu Virgil* (N; P); *Guttman Tiberiu* (2396); *Haret Radu* (2305, 2311, 2333); *Mărgineanu Ioan* (2293); *Mihăileanu N.* (P.); *Novac Ioan* (P; 2335, 2346, 2347, 2348, 2349, 2350, 2357, 2359, 2363, 2374, 2375, 2382, 2384, 2387, 2389, 2393, 2394, 2395, 2396, 2399, 2400, 2401, 2403, 2408, 2409); *Opriş C-tin* (2393, 2399, 2400, 2401, 2405); *Petrovici Adalbert* (2374, 2384, 2389, 2390, 2396, 2400, 2401); *Popescu D-tru* (2094, 2135, 2250, 2347, 2357, 2366, 2391, 2393); *Stern Tiberiu* (2393, 2401); *Teodorescu Petre* (P; 2330, 2338, 2339, 2346, 2362).

INFORMAŢIUNI

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, pentru a fi luate în consideraţie, trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Rugăm pe corespondenţii noştrii ca problemele propuse să fie însoţite de soluţiile corespunzătoare.

Legându-se colecţiileR. M. T., anii II-XXIV, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 800 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II—XXIV, cu preţul de lei 5000 volumul şi se trimet la cerere.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

ANUL XXVI. MAIU 1946 No. 3.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIŞOARA

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNII SIBIIU

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 500 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 4000 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRĂINĂTATE ESTE DE 10.000 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **D. POMPEIU:** RATIONAMENTUL ARITMETIC (CATEVA EXEMPLE).
2. **DUMITRU ION MANGERON:** OPERA STIINTIFICA A LUI MAGNUS MITTAG-LEFFLER.
3 NOTE MATEMATICE 6, 7. 8.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. INTSTITUTUL DE STIINTA MATEMATICA.
6. PROBLEME REZOLVATE: 1680, 2171, 2177, 2337.
7. PROBLEME PROPUSE: 2418 - 2425.
8. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timişoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931.

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXVI al „REVISTEI MATEMATICE DIN TIMIŞOARA" este de 4000 (patru mii) lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale, vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Politehnica Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Politehnica Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Politehnica Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXVI, de 5000 (cinci mii) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXV inclusiv, broşate, 5000 lei fiecare.

ANUL XXVI — NO. 3. TIMISOARA, MAIU 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 500 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 4000 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Politehnica Timișoara.

RAȚIONAMENTUL ARITMETIC: CÂTEVA EXEMPLE.

de

D. POMPEIU

1. Să considerăm ecuația

$$x(x+6)=y^2$$

și să încercăm a arătà că, în *numere întregi*, o asemenea egalitate este imposibilă.

O primă idee, pentru aceasta este de a arăta că dacă x este *întreg* expresia

$$x(x+6)$$

este totdeauna cuprinsă între două pătrate *consecutive.*

De exemplu

$$(x+2)^2<x^2+6x<(x+3)^2.$$

Avem

$$(x+2)^2=x^2+4x+4$$
$$(x+3)^2=x^2+6x+9,$$

dar

$$(x+2)^2$$

nu este inferior lui x^2+6x de când atunci când

$$4x+4<6x$$

ceia ce face

$$4<2x$$

sau

$$x>2.$$

Iar pentru

$$x=2$$

avem

$$2(2+6)=16=4^2$$

adecă o soluție a problemei. Se înțelege $x=1$ nu este soluție.

Așa dar încercarea noastră de a plasa pe

$$x(x+6)$$

între două pătrate consecutive ne-a condus la o soluție a problemei pentru $x=2$.

2. Să privim acum și altfel lucrurile, căutând în alt chip deslegarea.

Scriem

$$x(x+2.3)=y^2$$

și apoi

$$x^2+2\ 3.x+3^2=y^2+3^2$$

ceia ce ne permite să scriem

$$(x+3)^2=y^2+3^2$$

sau încă

$$(x+3)^2-y^2=3^2$$

adecă, fiind că am făcut în membrul întâiu o diferență de pătrate

$$(x+3-y)(x+3+y)=3^2$$

În membrul întâiu cei doi factori sunt ne-egali, în membrul al doilea: 3 este un număr prim: deci nu putem avea de cât

$$x+3-y=1$$
$$x+3+y=9$$

sistem care se rezolvă în soluția unică

$$x=2$$
$$y=4.$$

3. Să observăm, înainte de a trece mai departe, că metoda întrebuințată e aplicabilă cazului general când ecuația dată este

$$x(x+2p)=y^2$$

cu p număr prim.

4. Și acum, pentru a încheia aceste exemplificări de diversitate în metodele raționamentului aritmetic, să considerăm o problemă veche, clasic tratată:

$$x(x+1)$$

produsul a două numere întregi consecutive nu poate fi un pătrat perfect.

În adevăr avem

$$x^2 + x$$

număr întreg care se găseşte între x^2 şi $(x+1)^2$.

Dar, dacă punem problema lui $x\,(x+1)$ în cadrul larg al lui

$$x\,(x+n)$$

în care n este, el însuş, un întreg *dat?*

Observăm atunci că pentru n nepereche

$$n = 2p + 1$$

dacă luăm

$$x = p^2$$

avem

$$p^2(p^2 + 2p + 1) = [p\,(p+1)]^2$$

adecă *o soluţie a problemei propuse.*

Ce rezultă de aci?

Că, în cazul lui

$$x\,(x+1)$$

avem

$$p = 0$$

şi că patratul căutat este

$$0^2(0^2 + 2.0 + 1) = [0\,(0+1)]^2.$$

Soluţie *banală*, evident: dar care ne arată că soluţiile banale nu trebuesc totdeauna neglijate pentru că ele, uneori, sunt indicele unor cazuri generale cu soluţii bine determinate.

OPERA ŞTIINŢIFICĂ A LUI GUSTAV MAGNUS MITTAG-LEFFLER

(16. III. 1846 — 7 VII. 1927).

IN MEMORIAM

de

DUMITRU ION MANGERON

In apropiere de Stockholm, în Midgoard, Djursholm, în cadrul unei privelişti încântătoare, se găseşte situat, într'o totală armonie cu natura înconjurătoare, un măreţ şi ospitalier castel. Acest castel adăposteşte într'însul o bibliotecă matematică de reputaţie mondială, care constitue punctul de atracţie al cercetătorilor nu numai din ţările scandinave şi din Finlanda, ci şi din toate ţările lumii civilizate. El posedă deasemenea o arhivă cu un număr foarte mare de scrisori ale matematicienilor contimporani.

Castelul din Djursholm este astăzi celebrul Institut Matematic al soţilor *Gustav (Gösta) Magnus Mittag-Leffler* şi *Signe Mittag-Leffler,* fiica generalului finlandez *af Lindfors*, un *Mecena* al ţărilor nordice. Acest Institut Matematic a fost creat prin străduinţa pasionată a matematicianului suedez *G. Mittag-Leffler*, convins că nu se poate face ştiinţă serioasă fără o prealabilă şi sistematică organizare a unei bune biblioteci matematice. Institutul a fost oferit în întregime de către *Mittag-Leffler*, patriei sale, pe care a iubit-o ca puţini alţii.

Ar fi de ajuns acest unic gest ce reprezintă dăruirea unei vieţi de muncă neobosită de om de ştiinţă, de organizator şi de colecţionar pasionat, pentru a justifica dreptul savantului matematician *G. Mittag Leffler* la toate onorurile posibile din partea păturii intelectuale din lumea întreagă.

Se poate spune însă lucruri tot aşa de importante despre alte realizări ale sale pe tărâm internaţional şi pe acel naţional.

Mittag-Leffler, omul de ştiinţă universală care este Matematica, a reuşit cu mult înaintea oricăror reforme cu caracter social — să dărâme hotarele spaţiului şi să îmbogăţească „comoara comună de ştiinţă şi de artă a omenirii“[1] *prin crearea şi conducerea neîntreruptă zi de zi şi ceas de ceas, timp de 45 ani a revistei „Acta Mathematica“ înfiinţată de dânsul în 1882, cu sprijinul spiritual al marilor matematicieni Charles Hermite şi Karl Weierstrass şi cu înaltă oblăduire şi sprijinul financiar al M. S. Regele Gustav II al Suediei.*

Ceeace a făcut *L. Crelle* pentru Germania, prin înfiinţarea, în 1826, şi conducerea neîntreruptă timp de 30 de ani a revistei matematice „Journal für die reine und angewandte Mathematik“ şi *J. Liouville*, în 1836, pentru Franţa, prin crearea şi dirijarea incontinuă timp de 38 ani a revistei „Journal de Mathématiques pures et appliquées“, *Mittag-Leffler* a izbucnit să facă într'un chip cu totul strălucit pentru ţările scandinave, consacrându-şi întregul său talent de organizator şi devotamentul unui pasionat om de ştiinţă creaţiei şi conducerii revistei „Acta Mathematica“.

Revista de înaltă specialitate „Acta Mathematica“, încurajată de simpatia universală a matematicieni-

---

[1]) *Sergescu P.:* „Gândirea Matematică“. Edit. Ardealul. Cluj 1928, p. 192.

lor, s'a plasat, chiar din momentul apariţiei sale, în rangul celor mai bune şi pretenţioase publicaţii matematice contimporane, dând totodată şi un impuls fecund studiilor matematice în ţările nordice, ţări, care reunesc cu mândrie — în domeniul ştiinţelor pozitive — gloria unui *Abel* cu aceea a unui *Linné*, unui *Scheele*, unui *Berzélius* şi a unui *Oersted*.

Propunându-şi, după cum se poate citi[a] în prefaţa vol. I din „Acta Mathematica"[2], să înceapă noua publicaţie în scopul de a servi ştiinţa, reunind şi asociind cercetările noui care ajută la progresul Matematicei prin noutatea rezultatelor sau originalitatea metodelor, *Mittag-Leffler* a reuşit pe deplin în misiunea ce şi-a fixat-o. L-a favorizat şi faptul, intuit desigur de acest om de ştiinţă, că momentul apariţiei revistei să coincidă cu o epocă care s'a arătat a fi una dintre cele mai fecunde în Istoria Matematicei, prin numărul mare şi prin importanţa descoperirilor care ating cele mai profunde concepţii ale Analizei Matematice moderne.

In primii zece ani de la apariţie, în „Acta Mathematica" s'au publicat 162 articole semnate de 77 autori, ocupând mai mult de 4000 pagini în 4°, dintre care 11 memorii fundamentale ale lui *H. Poincaré* şi unul sau mai multe memorii indicatoare de drumuri noui în diferite ramuri ale Matematicei ale savanţilor: *P. Appell, Bertrand, Bjerkness, P. du Bois Reymond, Brioschi, G. Cantor, Casorati, Darboux, Fricke, Fuchs, Halphen, Hermite, Hilbert, Hurwitz, Klein, S. Kovalevski, Kummer, Laguerre, Lindelöf, Lipschitz, Markoff, Minkowski, Mittag-Leffler, Netto, E. Picard, Reye, Schläfli, Sonine, Stieltjes, Staude, Tchebycheff, Volterra, Weierstrass, Zeuthen, ş. a.*

In aceeaşi perioadă de timp, această revistă, prin străduinţa lui *Mittag-Leffler* care a obţinut fondurile necesare, a instituit două premii atrăgătoare în vederea promovării importantelor contribuţii ştiinţifice care să intereseze Dinamica şi Teoria funcţiilor de variabilă complexă. Cele două premii s'au atribuit, respectiv, lui *H. Poincaré*, pentru un important memoriu asupra celebrei probleme de Mecanică, numită „problema celor trei corpuri"[3], şi lui *P. Appel*, pentru o preţioasă cristalizare a teoriei funcţiunilor abeliene[4].

Cu ocazia inaugurării la Oslo (Christiania) a monumentului marelui matematician norvegian *Niels Henrick Abel* (1802—1829), inaugurare, căreia i-a fost hărăzit să coincidă cu momentul sărbătoririi centenarului dela naşterea acestuia, *Mittag-Leffler* a organizat în memoria lui *Abel* tipărirea a trei volume din „Acta Mathematica" (26, 27 şi 28), cu lucrările mai multor matematicieni moderni, inspirate spiritual de geniul matematic al lui *Abel*, geniul „tânărului cu suflet de copil, a gânditorului care a enunţat legile veşnice ale ştiinţei numărului, a fericitului care a gustat din bucuria creaţiei cum au putut să guste numai puţinii aleşi ai omenirii şi care a intuit că timpul nu va putea să clatine vreodată culmile predominante în care s'au situat cugetările sale din domeniul ştiinţei"[5].

Începând cu volumul 45 din „Acta Mathematica", *Mittag-Leffler* lărgeşte programul revistei sale, anunţând lumii de specialişti că se vor primi spre a fi publicate în sânul revistei atât acele memorii originale în care subiectul tratat va fi expus în detalii cu explicaţia precisă a terminologiei întrebuinţate, cât şi bibliografii complecte ale celor mai mari geometri ai timpului, redijate de ei înşişi. Drept model pentru aceste din urmă lucrări de înaltă sinteză, *Mittag-Leffler* indică „Analiza lucrărilor lui *H. Poincaré*", făcută de el însuşi şi publicată în volumul 38 din „Acta Mathematica". In aceleaş timp, *Mittag Leffler* anunţă şi cooptarea unui alt matematician în calitate de codirector al revistei, ales în persoana lui *N. E. Nörlund*,

---

a) Toate citatele s'au scos din originalele timpului, aflate în adirabila Bibliotecă a Seminarului Matematic al Universităţii din Iaşi.

[2]) Acta Mathematica, (A M.), Stockholm I, 1882, I—VI.

[3]) „Sur le problème de trois corps et les équations de la Dynamique", prezentată pentru concurs cu motto: „Nunquam praescriptos transibunt sidera fines". *(H. Poincaré)*, A. M., 13 (1890), 5—266.

[4]) „Sur les intégrales des fonctions multiformes et leur application au développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques", prezentată pentru concurs cu motto: „Nous devons l'unique science (Que l'homme puisse conquérir) (Aux chercheurs dont la patience). En a laissé les fruits mûrir". *(P. Appell)*, A. M., 13 (1890), 5—163.

[5]) *Mittag-Leffler* „Erinnerung an d. 100. Wiederkehr von Abels Geburtstag", reprodus în A. M., 50 (1927), IV—V Pentru viaţa şi opera lui *N. H. Abel* a se vedea în literatura noastră ştiinţifică: *P. Cazanacli*, Rev. St. „V. Adamachi", Iaşi, 16 (1930), 3—7).

creator al teoriei ecuaţiilor cu diferenţe finite. Începând cu volumul 50 (1927), în urma dispariţiei magului dela Djursholm, conducerea revistei „Acta Mathematica“ este preluată de cunoscuţii matematicieni *Nörlund* şi *T. Carleman*, unul dintre creatorii teoriei funcţiilor „quasi“-analitice. Astfel continuitatea apariţiei revistei „Acta Mathematica“ a fost asigurată, în acelaşi spirit, cu un succes remarcabil, până astăzi[6].

Mai multe adrese de mulţumire, semnate de fiecare dată de sute de matematicieni din lumea întreagă, i-au fost prezentate lui *Mittag-Leffler* în decursul anilor, pentru minunata sa operă de propagare a ştiinţei, Ne este plăcut să observăm, că prima adresă de acest fel, trimisă cu ocazia apariţiei volumului 20 din „Acta Mathematica“, a fost iscălită de unul dintre iniţiatorii promotorii lucrărilor matematice dela noi, regretatul profesor *Emmanuel.*

Puţin înainte de a ne părăsi pentru totdeauna, *Mittag-Leffler* a putut să se bucure de o nouă dovadă de înaltă apreciere a specialiştilor din patria sa şi din alte ţări ale lumii civilizate pentru măreaţa sa realizare pentru progresul ştiinţelor matematice. Cu ocazia împlinirii vârstei de 80 ani, în 1926, lui *Mittag-Leffler* i-au fost prezentate în omagiu trei volume din „Acta Mathematica“, conţinând memoriile a 46 dintre cei mai renumiţi matematicieni ai timpului nostru, cu următoarea dedicaţie specială: „Scripa Mathematica A. D. XVII. Kal. Aprilis A. MCMXXVI in Actis Mathematicis publicata illustrissimo doctissimo viro *GUSTAVO MITTAG-LEFFLER* hoc die octogesimum aetatis compleoti annum obtulerunt“[7].

* * *

Mittag-Leffler provine dintr'o talentată familie, în sânul căreia cultul ştiinţei înalte era o tradiţie. Astfel, bunicul după mamă al lui *Mittag-Leffler* este autorul unui codice juridic al Bisericii suedeze. Sora sa *Anne Charlotte Leffter-Edgren*, mai târziu contesa *de Cajanello*, a devenit cunoscuta şi apreciata scriitoare, iar fratele său *Frits Läffler* un valoros cercetător în domeniul filologiei.

[6]) In anul 1943, A. M. (Uppsala), 75.
[7]) A. M. Djursholm, 49 (1926), V.

Mittag-Leffler, luând hotărârea de a purta laolaltă atât numele patern de *Leffler* cât şi numele mamei sale, născută *Mittag*, a imortalizat prin opera sa ştiinţifică, amândouă aceste nume.

Anul naşterii lui *Mittag-Leffler* coincide cu anul 1846, anul în care *Bernhard Riemann* a început să contribuie, paralel cu vastele aporturi matematice ale lui *A. Cauchy*, la crearea celei mai mari şi mai frumoase opere din Analiza Matematică modernă, numită Teoria funcţiilor de variabilă complexă.

Talentul matematic al lui *Mittag-Leffler* se evidenţiază încă din copilărie[8]. La vârsta de 26 ani, în 1872, tânărul doctor în Filosofie (titlul acesta se dădea multă vreme în universităţile germane şi doctorilor în Ştiinţele Matematice) e numit docent la Universitatea din Uppsala. In 1877, *Mittag-Leffler*, după ce refuză invitaţia ce i s'a făcut în 1876 de a ocupa o catedră de Matematică la Universitatea din Berlin, devine profesor titular la Helsingfors şi, în 1881, este numit în aceeaşi calitate la Stockholm. Acolo, după cum am spus mai sus, întemeiază celebra sa revistă „Acta Mathematica“, în 1882.

(Va urma).

NOTE MATEMATICE

6. — *Asupra problemei 2265.*

In această problemă, rezolvată la pag. 142, Vol. XXV R. M. T, se cere *patratul de 4 cifre care se termină cu rădăcina sa patrată.*

D-l Prof. *O. Ţino* în nota de la pag. 18 din acest an dă indicaţii pentru rezolvarea problemei mai generale când se cere *un patrat oarecare, ce se termină cu rădăcina lor patrată.*

Prin nota de faţă vreau să informez cititorii R. M. T. că şi regretatul *Gh. Ţiţeica* s'a ocupat pe vremuri de această problemă generală. El a scris un articol în *Gazeta Matematică* Vol. IX pag. 77 şi 101, cu titlul *O chestiune de teoria numelor* în care a răspuns la următ arele 2 întrebări:

[8]) Biografia lui *G. Mittag-Leffler* este descrisă viu şi atrăgător de *N. E. Nörlund*, A. M., 50 (1927), VI–VII. In literatura noastră ştiinţifică a se vedea: *T. L. (Traian Lalescu)*, Bull. Math. Soc. Roum. d. sci. 30 (1927), 59–60.

a) *Câte numere de n cifre există în o bază de numerație, ale căror patrate să se termine cu rădăcina lor?*

b) Cum se pot găsi aceste numere?

Studiul complet al lui *Gh. Țițeica* duce la următoarele rezultate foarte interesante:

1°. *Congruența*

$$N^2 \equiv N \pmod{b^n}, \qquad N < b^n$$

are un număr de soluții egal cu îndoitul numărului de descompuneri ale bazei b în câte un produs de 2 factori primi între ei.

2°. *Între 2 soluțiuni x, x' deduse din aceiași descompunere a bazei b există relația*

$$x + x' = b^n + 1. \tag{1}$$

Deci dacă pentru o valoare a lui *n* se cunoaște o soluție *x*, se deduce imediat a 2-a soluție din (1).

In particular, în baza 10, nu se găsesc de cât 2 soluții pentru o valoare *n* căci 10 nu admite de cât descompunerea 2×5 în factori primi.

Aplicând metoda lui *Gh. Țițeica* găsim că problema 2265 are următoarele soluțiuni, dintre care una formal de 4 cifre,

$$25^2 = 0625 \qquad \text{și} \qquad 76^2 = 5776.$$

Între rădăcinile acestor soluțiuni se verifică relația (1)

$$25 + 76 = 101.$$

Gh. Țițeica termină articolul punând problema mai generală a rezolvării congruenței

$$N(N - k) \equiv 0 \pmod{b}$$

pe care o lasă pe seama corespondenților.

De această congruență generalizată s'a ocupat D-l *I. V. Mătieș* într'un articol publicat la pag. 1 din R.M T. Vol. XXIV.

G L Gh. Buicliu

7. — *Asupra problemei 2289.*

S'a arătat în soluția acestei probleme (R. M. T., An. XXV, No. 12, pp. 142—43) că aflarea numărului N al cărui patrat satisface condiției cerute de enunțul problemei este dat de egalitatea

$$(N-1)(N+1) = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot (a\,b), \tag{1}$$

însemnând cu $(a\,b)$ un număr de două cifre, ce urmează a fi determinat. În cazurile examinate pentru soluționarea problemei s'a făcut în mod tacit ipoteza că $(a\,b)$ este un *număr prim, ipoteză nejustificată.* Pentru o *soluție complectă* vom presupune că în cazul ecuației (1) am desfăcut numărul $(a\,b)$ într'un produs de două numere p și q, prime între ele, sau având cel mai mare divizor pe 2, urmând astfel să determinăm pe p și q, deci pe N, satisfăcând egalității

$$(2)\quad (N-1)(N+1) = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot p \cdot q \quad (p \cdot q < 100).$$

Scriind toate cazurile de examinat și eliminând pe acelea pentru care N nu poate satisface condiției $316 < N < 1000$, vom avea de rezolvat pe rând zece sisteme în cazul când p și q sunt numere prime între ele.

a) 1. Să considerăm primul sistem

$$N - 1 = 13p, \quad N + 1 = 3 \cdot 7 \cdot 37\, q,$$

care n'ar fi posibil decât pentru $q = 1$ și $24 < p < 77$.

Avem în acest caz

$$13p = 3 \cdot 7 \cdot 37 - 2 \quad \therefore \quad 13p = 775.$$

care nu dă o valoarea întreagă *p, deci nici o soluție.*

2. Pentru sistemul

$$N - 1 = 37p; \quad N + 1 = 21 \cdot 13\, q,$$

trebue ca

$$8 \leqq p \leqq 27, \quad 2 \leqq q \leqq 3$$

să satisfacă ecuația

$$37p = 273q - 2,$$

dar $273q - 2 \equiv 14q - 2 \pmod{37}$, deci $7q \equiv 1 \pmod{37}$.

Însă pentru $q = 2$, avem $7q - 1 \equiv 13 \pmod{37}$, iar pentru $q = 3$, $7q - 1 \equiv 20 \pmod{37}$, ca urmare acest sistem nu dă o soluție.

3. Pentru sistemul

$$N - 1 = 3 \cdot 7 \cdot p; \quad N + 1 = 13 \cdot 37 \cdot q$$

avem condițiile:

$$15 < p \leqq 47, \quad 1 \leqq q \leqq 2; \quad 3 \cdot 7p = 481q - 2.$$

Dar $\qquad 481q - 2 \equiv q - 2 \pmod{3}$

și $\qquad 481q - 2 \equiv 5q - 2 \pmod{7}$,

deci urmează să avem

$$q \equiv 2 \pmod{3}, \quad 5q \equiv 2 \pmod{7},$$

însă din cele două valori ale lui $q = 1, 2$, singura

$q=2$ satisface prima congruenţă, dar nu şi pe a doua. Nu avem nici o soluţie.

4. 5. 6. 7. Procedând în acelaşi fel în cazul sistemelor

$$\begin{cases} N-1=3.13.p \\ N+1=7.37.q \end{cases} \quad \begin{cases} N-1=3.37.p \\ N+1=7.13.q \end{cases}$$

$$\begin{cases} N-1=7.13.p \\ N+1=3.37,q \end{cases} \quad \begin{cases} N-1=7.37.p \\ N+1=3.13.q \end{cases}$$

nu găsim nici o soluţie pentru problemă.

8. Pentru sistemul

$$N-1=13.37.p\,; \quad N+1=3.7.q$$

trebue să avem împlinite condiţiile

$$1\leqq p\leqq 2, \quad 15\leqq q\leqq 47\,; \quad 13.37\,p=21\,q-2,$$

dar $21-2\equiv 8-2 \pmod{13}$, deci urmează să determinăm pe q întreg astfel ca

$$4q\equiv 1 \pmod{13} \quad \text{şi} \quad 21\,q\equiv 2 \pmod{37}.$$

Prima congruenţă dă în condiţiile cerute $q=23;36$ şi avem

$$21\,q-2=21.23-2=481\equiv 0 \pmod{37}$$

şi $21\,q-2=21.36-2\equiv 14 \pmod{37}$,

deci $q=23$ este o soluţie, pentru care $p=1$, deci $(a\,b)=23$, iar $N=482$. Avem în acest caz o soluţie a problemii

$$\boxed{482^2=232324}\,.$$

9. Pentru sistemul

$$N-1=3.7.13.p\,; \quad N+1=37.q,$$

avem condiţiile

$$1<p<5, \quad 8<q<27 \text{ şi } 3.7.13\,p=37\,q-2.$$

Dar

$$37\,q-2\equiv q-2 \pmod 3\,; \quad 37p-2\equiv 2q-2 \pmod 7\,;$$

$$37\,q-2\equiv 11\,q-2 \pmod{13},$$

deci

$$q\equiv 2 \pmod 3, \quad q\equiv 1 \pmod 7 \text{ şi } 11\,q\equiv 2 \pmod{13}.$$

Din a doua cougruenţă avem $q=15;22$, valori care nu satisfac pe celelalte două congruenţe, deci nici o soluţie.

10. Asemenea sistemul

$$N-1=3.7.37p, \quad N+1=13q,$$

pentru care $1\leqq p\leqq 1$, $24<q<76$ şi $777\,p=13\,q-2$, nu dă nici o soluţie.

b) În cazul când presupunem $p=2\,p'$, $q=2\,q'$, p' fiind prim cu q', din fiecare caz tratat mai sus deducem limitele numerelor p' şi q' şi ecuaţia care le leagă. Procedând ca în cazurile tratate, cele zece cazuri noi nu dau nici o soluţie.

Aşadar, soluţia găsită

$$232324=482^2$$

este singura soluţie a problemei, concluzie care în rezolvarea dată de noi aci *este justificată.*

Observare. Dacă prin enunţul problemei s'ar fi cerut patratul de forma

$$N^2\equiv 10^4\,N_1+10^2\,N_1+N_1+1,$$

în care N_1 este un număr de două cifre, mai găseam încă soluţia formală

$$N^2\equiv 10^4\times 99+10^2\times 99+99+1$$

sau $1000^2=1000000$, pe lângă soluţia banală $N^2\equiv 1$.

Problema poate fi generalizată.

O. N. ŢINO

8. — *Observare.* In orice patrulater circumscris unui cerc, bisectoarele unghiurilor interioare sunt concurente în centrul cercului şi nu numai patratul, rombul, trapezul isoscel sau cel dreptunghic, circumscrise unui cerc, se bucură de această proprietate, aşa cum se afirmă în articolul *„Trapeze particulare“* publicat în numărul precedent

G L GH. B.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul LI, No 8, Aprilie 1946. O aniversare, de G-l *Gh. Buicliu.* Asupra unor triunghiuri Γ, de *Gh. D. Simionescu.* Matematicienii români şi Franţa, de *Paul Montel.* Raportul Comisiunii pentru premiul „Ing. *Alexandru Roşu*“, de Ing. *Al. D. Bunescu*, *Al. Roşu*, Ing. *D. V. Stoica.* Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. *Intermédiaire des recherches mathématiques*, T. I, fasc. 3, 1945.

3. *Petre Sergescu. Curs de Geometrie Analitică*, predat la Politechnica din Bucureşti, 1945—46.

S'a primit de o camdată o singură fascicuiă litografiată, care cuprinde frumoasa şi substanţiala lecţie de deschidere, cu multe informaţii şi date istorice.

4. *Mihail St. Botez. Geometria Descriptivă*, Curs profesat la Politechnica *„Gh. Asachi“*, Iaşi. Această lucrare

didactică de 380 pagini, tipărită în condiţii ireprosabile, are 305 figuri foarte bine executate şi conţine 260 de aplicaţii.

Este singura carte în româneşte de invăţământ superior cu titlul de mai sus şi este destinată a aduce mari servicii studenţilor de la Politechnici şi Universităţi. Sforţările autorului — fost student strălucit al marilor profesori *Ermil Pangrati* şi *Gino Loria* — de a da în aceste timpuri o minunată operă didactică, scrisă cu toată competenţa şi caracterizată printr'o expunere clară şi luminoasă, merită toată admiraţia şi recunoştinţa din partea celor ce o vor folosi, cărora le-o recomandăm în mod călduros. A se adresa direct autorului, strada Asachi No 7, Iaşi.

5. *Petre Sergescu.* Geometria în invăţământul technic. Lecţie de deschidere a cursurilor Şcoalei Politehnice din Bucureşti, la 1 Noembrie 1943. Aceiaşi caracterizare ca la sub nr. 3.

Această lucrare trebuie să fie cetită de orice student, sau profesor pentru bogaţia de informaţii ştiinţifice şi istorice ce cuprinde.

6. *Pierre Sergesco.* L'Université de Cluj et ses relations avec l'étranger (Extrait de la Revue de Transylvanie, t. X, 1945.

7. *Piotr Szymanski.* Essai sur la théorie mathématique des sensations de couleur (Mathematica, Vol. XXII, 1946.

8. *Gh. Th. Gheorghiu.* Sur certaines transformations asymtotiques. (Extrait des „Disquisitiones Mathematicae et Physicae", t. IV, fasc. 1—4, 1945).

9. Dr *Albert Gloden.* Mehrgradige Gleichungen (1944).

10. *Dumitru Ion Mangeron.* Problema spectrelor şi probleme de contur pentru o clasă de ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale de ordin superior (Revista „Adamachi", Vol. XXXI, No. 4, 1945).

11. *Dumitru Ion Mangeron.* Funcţiile lui *Green* de ordin *p* în teoria ecuaţiilor cu derivate totale de ordin superior (Revista „Adamachi", Vol. XXXII, No. 1, 1946).

12. *Dumitru Ion Mangeron.* Noui metode de cercetări pentru determinarea integralelor ecuaţiilor liniare cu derivate parţiale prin aplicarea transformatei multiple a lui *Laplace* cu domeniul de integraţie finit (Revista „Adamachi", Vol. XXXII, No. 1, 1946).

13. *Dumitru Ion Mangeron.* Matematica în cadrul Istoriei gândirii ştiinţifice şi a Culturii (Revista „Adamachi", Vol. XXXII, No. 1, 1946).

INFORMAŢIE.

INSTITUTUL DE ŞTIINŢE MATEMATICE.

In ziua de 8 Ianuarie 1946 a luat fiinţă legală *„Institutul de Ştiinţe Matematice"* alcătuit din toţi matematicienii din România care au apărut cu lucrări originale în publicistica de specialitate.

In şedinţa Adunării generale care a urmat acestei date, a fost ales comitetul următor: Preşedinte *D. Pompeiu;* secretar general *V. Vâlcovici;* casier *N. Ciorănescu;* membrii în comitet: *D. Barbilian, G. Demetrescu, Miron Nicolescu, O. Onicescu, Al. Pantazi, P. Sergescu, S. Stoilov, N. Teodorescu, G. Vrânceanu;* cenzori: *Al. Froda, Al. Ghica* şi *Gr. Moisil.*

Scopul urmărit de Institut este formulat în art 2 al statutelor: „promovarea cercetării ştiinţifice în domeniul ştiinţelor matematice, prin comunicări, prelegeri, publicaţii, congrese şi alte mijloace potrivite scopului".

Comitetul de conducere examinând mai de aproape felul în care Institutul ar putea avea o activitate eficientă fără a se suprapune altor instituţii cu scop, similar (cum ar fi Societatea Matematică), a ajuns să-şi înscrie în programul de lucru, cicluri de prelegeri sau de şedinţe de seminar în jurul unor subiecte de importanţă, în vederea uşurării efortului individual de cercetare precum şi în vederea stimulării la lucru. Ca început, d. *G. Vrânceanu* a ţinut un ciclu de trei prelegeri *„Asupra spaţiilor cu conexiune lineară"*, şi anume una despre *spaţii cu conexiune afină,* alta despre *spaţii cu conexiune proiectivă* şi în fine o a treia, *spaţii cu conexiune conformă.*

Un al doilea ciclu *„Asupra grupurilor lui Lie şi proprietăţile lor topologice"* a fost inaugurat în ziua de 26 Martie a c. de către d. *Vrânceanu,* care a expus sub o formă concentrată *cele trei teoreme ale lui Lie.* In ziua de Marţi 2 Aprilie d. *Pantazi* a vorbit în acelaşi ciclu despre *Invarianţii grupurilor continui finite,* rămânând ca în şedinţele următoare să se facă legătura cu noţiunea de spaţiu în Topologie.

Pentru la toamnă (1946) se proiectează un seminar condus de d. *Barbilian,* asupra *Algebrelor topologice.*

Institutul lucrează în cinci secţiuni:

I. Matematici pure.
II. Calcuiul probabilităţilor şi aplicaţii.
III. Mecanica şi fizica matematică.
IV. Astronomia şi Geodezia.
V. Hidrodinamica şi Aerodinamica.

Pe lângă activitatea secţiunii de Matematici pure, pe care am menţionat-o, Institutul a început a lucra şi în celelalte secţiuni. Aşa în secţiunea a III-a (Mecanică şi Fizică Matematică) s'au organizat o serie de prelegeri asupra „Suprafeţelor flexibile şi inextensibile" dintre care până acum s'au ţinut două de către d. *Ion Şabac,* asistent la Institutul

de Aerodinamică. Pentru luna Mai s'au anunţat două prelegeri în cadrul secţiunii a V-a (Hidro- şi Aerodinamică) una a D-rei *Simona Popp* asistentă la Laboratorul de Mecanică al Universităţii din Bucureşti, despre „Fluide compresibile“ şi alta a d-lui *Ion Cârstoiu*, asistent la Institutul de Aerodinamică despre „Aripi cu dimensiuni finite“.

Atât prelegerile cât şi seminariile sunt anunţate din vreme, cu indicaţiuni bibliografice (sumare), aşa fel încât auditorul să se poată pregăti pentru a profita cât mai mult şi pentru a lua parte cu folos la discuţii.

Deosebit de această activitate care s'a putut începe imediat după înfiinţare, Institutul îşi propune să realizeze într'un program de viitor: complectarea bibliotecii matematice din Bucureşti, publicări de monografii şi (cu timpul) un local propriu potrivit.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1680. — *Să se stabilească inegalităţile*

$$1+\sin^2 a\sin^2 b \geqq \sin^2 a+\sin^2 b,$$

$$1 \leqq \sin^2 a+\sin^2 b\sin^2 c+\cos^2 a(\cos^2 b+\cos^2 c)\leqq 2,$$

$$\sin^2 a\sin^2 b+\sin^2 c\sin^2 d+\cos^2 a\cos^2 d+\cos^2 b\cos^2 c\leqq 2,$$

oricare ar fi a, b, c, d.

LT C. IONESCU-TIU

Soluţie. Prima inegalitate se scrie, trecând totul în prima parte,

$$1-\sin^2 a-\sin^2 b+\sin^2 a\sin^2 b=$$
$$(1-\sin^2 a)(1-\sin^2 b)=\cos^2 a\cos^2 b\geqq 0$$

inegalitate evidentă. Avem egalitate când unul din arcele a sau b este de $\frac{1}{2}\pi$.

Pentru a doua inegalitate înlocuim peste tot sinusurile în funcţie de cosinusuri. Inegalitatea din dreapta se reduce la

$$-\cos^2 a(1-\cos^2 b)-\cos^2 b(1-\cos^2 c)-\cos^2 c(1-\cos^2 a)$$
$$=-\cos^2 a\sin^2 b-\cos^2 b\sin^2 c-\cos^2 c\sin^2 a\leqq 0$$

inegalitate adevărată deoarece fiecare termen este esenţial negativ. Egalitate are loc atunci când arcele a, b, c au valoarea zero sau $\frac{1}{2}\pi$. Pentru inegalitatea din stânga avem

$$1-(\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c)+$$
$$(\cos^2 b\cos^2 c+\cos^2 c\cos^2 a+\cos^2 a\cos^2 b)$$
$$=(1-\cos^2 a)(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c)+\cos^2 a\cos^2 b\cos^2 c$$
$$=\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c+\cos^2 a\cos^2 b\cos^2 c\geqq 0$$

inegalitatea fiind adevărată deoarece fiecare termen este pozitiv, iar egalitatea are loc atunci când cel puţin unul din arcele a, b, c are valoarea zero şi cel puţin unul valoarea $\frac{1}{2}\pi$.

In fine pentru a treia inegalitate transformăm totul în cosinus şi avem un rezultat analog cu inegalitatea precedentă din dreapta. Avem

$$-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c-\cos^2 d+\cos^2 a\cos^2 b+$$
$$\cos^2 c\cos^2 d+\cos^2 a\cos^2 d+\cos^2 b\cos^2 c$$
$$=(\cos^2 a\sin^2 b+\cos^2 b\sin^2 c+\cos^2 c\sin^2 d+\cos^2 d\sin^2 a)\leqq 0$$

paranteza fiind pozitivă ca sumă de pătrate. Egalitate vom avea când arcele a, b, c, d sunt nule sau $\frac{1}{2}\pi$.

Soluţie dată de D-nii: *Bakonyi C.* (Timişoara) şi *C. I. Jidanu* (Beiuş).

Gh. Th. Gh.

Problema 2171. — *Se cer cuburile perfecte, care reproduc la dreapta rădăcina cubică a lor.*

I. V. MATIES

Soluţia autorului. Fie N_p un număr de p cifre căutat, care verifică

$$(1)\qquad N_p^3=N_p+\text{Mult } 10^p$$
$$\therefore\quad N_p^3-N_p=M\cdot 10^p$$

o congruenţă de rezolvat în numere întregi.

Dacă cunoaştem soluţiile N_{p-1} ale congruenţei

$$(2)\qquad N_{p-1}^3=N_{p-1}+M\cdot 10^{p-1}$$

numerele N_p le găsim astfel:

Fie

$$(3)\qquad N_p=\overline{r\,N_{p-1}}=N_{p-1}+r\cdot 10^{p-1}$$

pentru care trebue să avem

$$N_p^3=N_{p-1}^3+3\times N_{p-1}^2\times r.10^{p-1}+M10^p=\overline{r\,N_{p-1}}+M.10^p$$
$$\therefore\quad N_{p-1}^3-N_p+(3N_{p-1}^2-1)10^{p-1}r=M.10$$
$$(4)\qquad \therefore\quad \frac{N_{p-1}^3-N_{p-1}}{10^{p-1}}+(3N_{p-1}^2-1)r=M.10$$

N_{p-1} fiind o soluție a congruenței (2), avem

$$\frac{N_{p-1}^3 - N_{p-1}}{10^p} = a + M.10$$

iar pentru

$$3N_{p-1}^2 - 1 = b + M.10$$

congruența (4) se reduce la o congruență de gradul prim în (r) și anume:

(5) $$a + b\,r = M.10.$$

Fie r_i soluțiile ei, soluția problemei este formată din cubul numerelor:

(6) $$\boxed{N_p = N_{p-1} + 10^{p-1}.r_i}.$$

Se vede deci că problema se soluționează din aproape în aproape, deducându-se soluțiile de p cifre din cele de $p-1$ cifre.

Vom soluționa problema în cazurile numerice $p = 1, 2, 3$.

a) Pentru $p = 1$, avem $N_1 = u$ (o cifră) și (1) devine

$$u^3 - u = M.10.$$

Fie $u = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, pe care încercându-le, găsim ca soluții numai pe

$$M_i = N_1 = 0, 1, 4, 5, 6, 9.$$

Deci soluțiile problemei sunt cuburile:

$$0^3 = 0; 1^3 = 1; 4^3 = 64; 5^3 = 125; 6^3 = 216$$

și $9^3 = 729$. in număr de 6 cuburi.

b) Pentru $p = 2$, avem

$$N_2 = Z\,u_i = u_i + 10Z$$

Z fiind dat de

$$\frac{u_i^3 - u_i}{10} + (3u_i^2 - 1).Z = M.10.$$

Găsim respectiv

$u_1 = 0 \;\therefore\; -Z = M.10 \;\therefore\; Z = 0 \;\therefore\; \boxed{N_2 = 00}$

$u_2 = 1 \;\therefore\; 2Z = M.10 \;\therefore\; Z = 0$ și $5 \;\therefore\; \boxed{N_2 = 01 \text{ și } 51}$

$u_3 = 4 \;\therefore\; 6 + 7Z = M.10$

$\therefore\; 7Z = 4 + M.10$

$\therefore\; Z = 3 \times 4 + M.10$

$\therefore\; Z = 2 + M.10$

$\therefore\; Z = 2$ și $\boxed{N_2 = 24}$

$u_4 = 5 \;\therefore\; 2 + 4Z = M.10$

$\therefore\; 4Z = 8 + M.10$

$\therefore\; 6Z = -8 + M.10$

$\therefore\; 6Z = 2 + M.10$

$\therefore\; 3Z = 1 + M.5$

$\therefore\; Z = -3 \times 1 + M.5$

$\therefore\; Z = 7 + M.5$

$\therefore\; \boxed{Z = 7}$ și deci $\boxed{N_2 = 75}$

$u_5 = 6 \;\therefore\; 1 + 7Z = M10$

$\therefore\; Z = 7$ și deci $\boxed{N_2 = 76}$

$u_6 = 9 \;\therefore\; 2 + 2Z = M10$

$\therefore\; Z = 4$ și $5 \;\therefore\; \boxed{N_2 = 49 \text{ și } 99}$.

Soluțiile problemei pentru $p = 2$ sunt cubul

$$N_2 = 00; 01; 24; 25; 49; 51; 75; 76; 99.$$

în număr de 9 soluții.

c) Pentru $p = 3$ se fac calcule analoage și anume:

$$N_3 = \overline{s\,N_2} = 100\,s + N_2$$

unde cifra s e dată de congruența:

$$\frac{N_2^3 - N_2}{100} + (3N_2^2 - 1)\,s = M.10$$

unde N_2 se înlocuește cu valorile găsite sub b) găsim respectiv

$N_2 = 00 \;\therefore\; s = 0 \;\therefore\; N_3 = 000$

$N_2 = 01 \;\therefore\; s = 0$ și $5 \;\therefore\; N_3 = 001$ și 501

$N_2 = 24 \;\therefore\; s = 6 \;\therefore\; N_3 = 624$

$N_2 = 25 \;\therefore\; s = 1$ și $6 \;\therefore\; N_3 = 125$ și 625

$N_2 = 49 \;\therefore\; s = 2$ și $7 \;\therefore\; N_3 = 249$ și 749

$N_2 = 51 \;\therefore\; s = 2$ și $7 \;\therefore\; N_3 = 251$ și 751

$N_2 = 75 \;\therefore\; s = 8 \;\therefore\; N_3 = 875$

$N_2 = 76 \;\therefore\; s = 3 \;\therefore\; N_3 = 376$

$N_2 = 99 \;\therefore\; s = 4$ și $9 \;\therefore\; N_3 = 499$ și $999.$

Soluțiile problemei sunt cubul numerelor

$$N_3 = 000; 001; 125; 249; 251; 376; 499; 501; 624; 625; 749; 751; 875 \text{ și } 999,$$

în număr de 14 soluții.

Deci problema are ca soluții sub 10^9 pe următoarele 29 cuburi (cu soluțiile formale):

$$\begin{cases} 0^3 = 0; 1^3 = 1; 4^3 = 64; 5^3 = 125; 6^3 = 216 \\ 9^3 = 729. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 00^3 = 00\,;\ 01^3 = 0\,1\,;\ 24^3 = 13824\,;\ 25^3 = 15625 \\ 49^3 = 117649\,;\ 51^3 = 132651\,;\ 75^3 = 421875 \\ 76^3 = 438976\,;\ 99^3 = 970299 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 000^3 = 000\,;\ 001^3 = 001\,;\ 125^3 = 1953125 \\ 249^3 = 15438249\,;\ 251^3 = 15813251\,;\ 376^3 = 53157376 \\ 499^3 = 124251499\,;\ 501^3 = 125751501\,;\ 624^3 = 242970624 \\ 625^3 = 244140625\,;\ 749^3 = 420189749\,;\ 751^3 = 423564751 \\ 875^3 = 669921875\,;\ 999^3 = 997002999. \end{cases}$$

Problema se soluţionează analog şi pentru cazurile $p > 3$ precum s'a arătat la început.

Problema 2177. — *Să se afle razele sferei înscrise şi a celei circumscrise unui tetraedru echifacial în funcţie de muchiile lui.*

EUGEN VISA

Soluţia autorului. Fie tetraedrul echifacial A B C D de muchii:

$$(1) \qquad \begin{cases} AD = BC = a \\ BD = CA = b \\ CD = AB = c \end{cases}$$

şi O centrul comun al celor două sfere în chestiune, prima de rază r, iar cealaltă de rază R.

Fie încă ω centrul cercului circumscris uneia oarecare din feţele tetraedrului de mai sus, să zicem A B C, pentru fixarea ideilor şi ϱ raza acestui cerc.

Dat fiind acuma că punctele O şi ω sunt la egală depărtare faţă de punctele A, B, C, dreapta $O\omega$ este perpendiculară pe planul triunghiului A B C şi deci:

$$(2) \qquad O\omega = r,$$

aşa încât din unul oarecare din triunghiurile dreptunghice $O\omega A$, $O\omega B$, $O\omega C$ avem:

$$(3) \qquad R^2 = r^2 + \varrho^2.$$

Pe de altă parte, între volumele v al tetraedrului O A B C şi V al tetraedrului A B C D existând relaţia evidentă:

$$(4) \qquad v = \frac{V}{4}$$

şi cum:

$$(5) \qquad \begin{cases} v = \dfrac{S\,r}{3} \\ V = \dfrac{1}{3}\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)S^2 - (a\,b\,c)^2}\ ^{*)} \end{cases}$$

*) Pentru a doua relaţie din (5) a se vedea problema 2136 din „R. M. T.", Vol. XXIII, pag 38.

unde S este aria triunghiului A B C, deducem cu uşurinţă că:

$$(6) \qquad \boxed{r = \frac{1}{4\,S}\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)S^2 - (a\,b\,c)^2}}\,.$$

Ţinând acum seama de relaţia (6) precum şi de relaţia cunoscută:

$$(7) \qquad \varrho = \frac{a\,b\,c}{4\,S},$$

prin intermediul relaţiei (3) obţinem:

$$(8) \qquad \boxed{R = \frac{1}{4}\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}}\,.$$

Formula 6) ne dă astfel raza sferei înscrisă în tetraedrul echifacial de muchii a, b, c, iar formula (8) pe aceea a sferei circumscrisă acestui tetraedru.

Soluţie dată de dnii: *Constantinescu Ilie* (Polit. Timişoara) şi *Mahrenholz J.*

Problema 2272 — *Pe ipotenuza unui triunghiu dreptunghic, în care* $AB = AC = 1$, *luăm punctele* D *şi* E *astfel ca*

$$\sphericalangle BAE = 3 \sphericalangle BAD.$$

Dacă se notează $BD = x$, $BE = y$, *se cere să se stabilească relaţia*

$$\frac{y}{x} = \frac{3 - 3\sqrt{2}\,x + x^2}{1 - 3x^2 + \sqrt{2}\,x^3}.$$

V. ALACI

Prima soluţie. Triunghiul B A C este dreptunghic şi isoscel, deci $\hat{B} = 45^0$ şi notând $\sphericalangle BAD = \alpha$, deci $\sphericalangle BAE = 3\alpha$, atunci din triunghiurile B A D şi B A E deducem ţinând seamă de enunţ

$$\frac{x}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin(45^\circ+\alpha)},\quad \frac{y}{\sin 3\alpha}=\frac{1}{\sin(45^\circ+3\alpha)}.$$

De aci scoatem

$$(1)\quad x=\frac{\sqrt{2}\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{1+\operatorname{tg}\alpha},\ (2)\quad y=\frac{\sqrt{2}}{1+\operatorname{tg}3\alpha}$$

Cum avem cunoscut

$$\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha},$$

relaţia (2) devine

$$(3)\quad \frac{y}{\sqrt{2}}=\frac{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}{1+3\operatorname{tg}\alpha-3\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}.$$

Dar din (1) rezultă

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{2}}{x}-1=\frac{\sqrt{2}-x}{x},$$

astfel că relaţia (3) devine

$$\frac{y}{\sqrt{2}}=\frac{1-\dfrac{3(\sqrt{2}-x)^2}{x^2}}{1+\dfrac{3(\sqrt{2}-x)}{x}-\dfrac{3(\sqrt{2}-x)^2}{x^2}-\dfrac{(\sqrt{2}-x)^3}{x^3}}$$

$$=\frac{[x^2-3(\sqrt{2}-x)^2]x}{x^3+3(\sqrt{2}-x)x^2-3\sqrt{2}-x)^2-(x\sqrt{2}-x)^3},$$

sau

$$\frac{y}{\sqrt{2}}=\frac{(-6+6\sqrt{2}x-2x^2)x}{-2\sqrt{2}+6\sqrt{2}x^2-4x^3}=$$

$$\frac{-2(3-3\sqrt{2}x+x^2)x}{-2\sqrt{2}(1-3x^2+\sqrt{2}x^3)}.$$

De aci deducem

$$\frac{y}{x}=\frac{3-3\sqrt{2}x+x^2}{1-3x^2+\sqrt{2}x^3},$$

tocmai relaţia cerută.

Soluţii date de d-nii: *Birănaş Ioan* (Polit., Timişoara), *Bogza Mihai* (Lic. Deva), *Chesaru Cristea* (Polit., Timişoara), *Constantinescu Ilie* (Polit., Timişoara), *Gligor Ioan* (student, Cluj), *Mazilu Marius* (Lic. Făgăraş) *Ovesea Nicolae* (Polit., Timişoara), *Tincu C-tin* (Polit., Timişoara) şi *Tutor Aurel* (Lic. Făgăraş).

Soluţia 2-a. Din triunghiurile semidreptunghice A B D şi A B E deducem

$$(1)\quad x=\sqrt{2}\,\mathrm{sp}\,\alpha,\quad y=\sqrt{2}\,\mathrm{sp}\,3\alpha,$$
$$(\text{unde } \alpha=\sphericalangle \mathrm{B\,A\,D}),$$

(Trigonometria patratică p. 47), deci

$$\frac{y}{x}=\frac{\mathrm{sp}\,3\alpha}{\mathrm{sp}\,\alpha}.$$

Ţinând seamă de relaţia cunoscută

$$\mathrm{sp}\,3\alpha=\frac{3\,\mathrm{sp}\,\alpha-6\,\mathrm{sp}_2\,\alpha+2\,\mathrm{sp}^3\,\alpha}{1-6\,\mathrm{sp}^2\,\alpha+4\,\mathrm{sp}^3\,\alpha},$$

(Trig. patratică p. 23), relaţia (2) devine, după ce simplificăm prin $\mathrm{sp}\,\alpha$ şi înlocuim $\mathrm{sp}\,\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ dedusă din (1),

$$\frac{y}{x}=\frac{3-6\dfrac{x}{\sqrt{2}}+2\dfrac{x^2}{2}}{1-6\dfrac{x^2}{2}+4\dfrac{x^2}{2\sqrt{2}}}=\frac{3-3\sqrt{2}x+x^2}{1-3x^2+\sqrt{2}x^2},$$

tocmai relaţia din enunţ.

Soluţii analoage date de d-nii: *Barbu Ion* (Romanaţi) şi *Stanciu Petre* (Polit., Timişoara).

Problema 2337. — *Se cere un număr* A *de m cifre, ştiind că scriindu-l de două ori unul după altul, obţinem un multiplu al patratului lui.*

GAVRIL CRETA

Soluţie. Conform enunţului putem scri

$$10^m\,\mathrm{A}+\mathrm{A}=k\,\mathrm{A}^2,\qquad (\mathrm{A}\neq 0).$$

De aci deducem

$$10^m+1=k\,\mathrm{A}.$$

Membrul întâi fiind un număr de $m+1$ cifre, iar A de m cifre, rezultă $2\leq k\leq 9$.

De altă parte 10^m+1, nefiind divizibil prin 2, 3, 5, rezultă pentru k numai valoarea 7 şi atunci din (1), deducem

$$\mathrm{A}=\frac{10^m+1}{7}.$$

Efectuând împărţirea, putem determina pe m în aşa fel ca 10^m+1 să fie divizibil prin 7, avem

$$A = \underbrace{100\ldots01}_{m+1 \text{ cifre}} : 7 = \underbrace{142\,857\,.\,142\,857\ldots\,143.}_{m \text{ cifre}}$$

Fie n numărul grupelor de forma 142857. Din (2) rezultă

(3) $$m = 6n + 3.$$

Pentru $n = 0$, rezultă din (3) $m = 3$, deci $A = 143$;
Pentru $n = 1$, rezultă din (3) $m = 9$, deci
$A = 142\,857\,143$;
Pentru $n = 2$, rezultă din (3) $m = 15$, deci
$A = 142\,857\,142\,857\,143$, etc.
Valorile găsite pentru A satisfac enunțul, căci avem

$$143\,143 = 7 \times 143^2$$
$$142\,857\,143 = 7 \times (142\,857\,143)^2$$
$$142\,857\,142\,857\,143 = 7 \times (142\,857\,142\,857\,143)^2$$

etc.

Soluții date de d-nii; *Arnăutu Marin* (Polit., Timișoara), *Chiriac C-tin* (Brăila), *Grigore A. Gheorghe*, *Vlăduț C-tin* (Polit., Timișoara), și *Vrânceanu G. Gheorghe* (Lic. Milit., Timișoara),

---

PROBLEME PROPUSE

2418. — Repetăm un număr de două cifre de două ori, îi scriem 1 la dreapta și avem un patrat perfect. Care este acel număr?

ILIE CONSTANTINESCU

2419. — Dacă $Ax+By+D=0$ și $Bx+Cy+E=0$, avem oricare ar fi t

$$(B+Ct)(y-tx)+D+Et+x(A+2Bt+Ct^2)=0,$$
$$(A+2Bt+Ct^2)x^2+Dx+Ey=C(y-tx)^2+2E(y-tx).$$

N. N MIHAILEANU

2420. — Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{x^2+3c^2}-\sqrt{x^2-c^2}=\sqrt{a^2-c^2},\quad (a>c),$$

radicalii fiind aritmetici. Soluția se găsește prin ridicări la patrat. Care sunt condițiile ce trebuesc impuse lui a și c ca această soluție să satisfacă ecuația dată.

GH. TH. GHEORGHIU

2421. — Să se arate că

$$\frac{C_{p-1}^0}{n}-\frac{C_{p-1}^1}{n+1}+\frac{C_{p-1}^2}{n+2}-\cdots$$
$$+(-1)^{p-1}\frac{C_{p-1}^{p-1}}{n+p-1}=\frac{(n-1)!\,p-1)!}{(n+p+1)!}.$$

MARIA NEUMANN

2422. — Se dă triunghiul ABC, cercul său înscris I tangent în D laturei BC. Fie E diametralul lui D în I, F intersecția lui AE cu BC, M simetricul lui A față de E, G centrul de greutate al triunghiului ABC și P intersecția lui IG cu AE. Dacă L și Q sunt punctele unde IM și IG taie pe BC, atunci

$$AE = PF \quad \text{și} \quad BL = QC.$$

G-L GH BUICLIU

2423. — Să se rezolve ecuația

$$30x^6-133x^5-1273x^4+px^3+qx^2-568x+192=0$$

și să se determine p și q, știind că între primele două rădăcini avem relațiile

$$x_1^2+x_2^2-x_1x_2=\frac{7}{36},\qquad x_1^3+x_2^3=\frac{35}{216},$$

iar celelalte rădăcini formează o diviziune armonică.

ION CARNATIU

2424. — Să se stabilească identitățile

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)+\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=3\operatorname{tg}3\alpha,$$
$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\operatorname{tg}3\alpha.$$

V. ALACI

2425. — În orice patrulater convex avem relația

$$\sum sp\frac{A}{8}-\sum sp\frac{A}{8}sp\frac{B}{8}+$$
$$2\,sp\frac{A}{8}\,sp\frac{B}{8}\,sp\frac{C}{8}\,sp\frac{D}{8}=\frac{1}{2}.$$

LT. C-DOR C V COSTACHESCU

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Balaniscu Chirică (2339, 2367, 2370, 2381, 2404); *Bălăuţă Mihai* (2339, 2355, 2371, 2375, 2401); *Berlovan Gh.* (2404, 2405, 2406, 2409); *Beşchea Radu* (P; 2368, 2387, 2389, 2391, 2392, 2396. 2397, 2398, 2399, 2401, 2405, 2407, 2408, 2409; *Brădăţeanu V.* (2413); *Bighea Ioan* (2322, 2334, 2342); *Boerescu Gh.* (P; 2403); *Diaconu Vasile* (2403, 2405, 2409); *Domilescu Eugeniu* (2338, 2380, 238 , 2383, 2391); *Feldmann Ştefan* (2403, 2405, 2406, 2409); *Filimon Ioan* (2124, 2130, 2186, 2195, 2202, 2347, 2349, 2379, 2393, 2396, 2399, 2400, 2401); *Guttman Tiberiu* (2347, 2395); *Haret Radu* (2312); *Ionescu Florin* (2195); *Mărcuţiu Silviu* (2250, 2276, 2298, 2310, 2324, 2363, 2390, 2396); *Munteanu Ioan* (2403, 2405, 2409); *Pisanca Ionel* (2402, 2403, 2405, 2408, 2409, 2410); *Pop Emil* (2347, 2350, 2355, 2357, 2368' 2384, 2396, 2403); *Popescu D-tru* (2276, 2396, 2400, 2401, 2403, 2406, 2409, 2413); *Puşcaşiu Silviu* (2405, 2410, 4213); *Rogoz Ioan* (2174, 2209, 2210, 2213); *Sergiu Pali* (1558, 2360, 2400, 2405, 2406, 2409, 2410); *Stanciu Mihail* (P; 2403, 2404, 2407, 2409); *Serengău Mihai* (2401, 2403, 2405, 2406, 2409; *Stroescu Florea* (2390, 2396, 2399, 2401; *Teodorescu Petre* (P; 2313, 2319, 2331, 2355, 2349, 2367, 2387, 2392, 2393, 2394, 2395, 2396, 3299, 2401, 2402, 2403, 2304, 2405, 2409; *Tincu C-tin* (2333, 2338, 2359, 2384, 2390, 2391, 2393, 2395, 2396, 2399, 2400, 2401, 2403, 2404, 2405, 2406, 2409, 2411, 2413); *Vrânceanu Gh.* (2209, 2213, 2290).

INFORMAŢIUNI

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, pentru a fi luate în consideraţie, trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Rugăm pe corespondenţii noştrii ca problemele propuse să fie însoţite de soluţiile corespunzătoare.

Legându-se colecţiileR. M. T., anii II-XXV, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 800 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II—XXV, cu preţul de lei 5000 volumul şi se trimet la cerere.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el. şi s'o iscălească.

ANUL XXVI IUNIE 1946 No. 4

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNII SIBIIU

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 500 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 4000 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRĂINĂTATE ESTE DE 10.000 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **DUMITRU ION MANGERON**: OPERA STIINTIFICA A LUI MAGNUS MITTAG-LEFFLER. (URMARE).
2. **SILAS GHEORGHE**: SOLUTII INTREGI ALE ECUATIILOR.
3 NOTE MATEMATICE 9, 10, 11.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 1159, 2160, 2347. 2355, 2357.
6 PROBLEME PROPUSE: 2426. - 2433.
7. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timișoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931.

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din ar.mul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXVI al „REVISTEI MATEMATICE DIN TIMIŞOARA" este de 4000 (patru mii) lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale, vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Politehnica Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui Dr. Ing. Ştefan Nadaşan (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Politehnica Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Politehnica Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXVI, de 5000 (cinci mii) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXV inclusiv, broşate, 5000 lei fiecare.

ANUL XXVI — No. 4. TIMISOARA, IUNIE 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 500 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 4000 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Politehnica Timișoara.

OPERA ȘTIINȚIFICĂ A LUI GUSTAV MAGNUS MITTAG-LEFFLER

(16. III. 1846 — 7 VII. 1927).

IN MEMORIAM

de

DUMITRU ION MANGERON

(Urmare)

Producția științifică a matematicianului *Mittag-Leffler* își implântează rădăcinile sale adânci în opera matematică a secolului al 19-lea, secol, care este caracterizat prin progresele uimitoare ale ramurilor Matematicei ce se situiază în categoria cantității, categoria numărului.

In adevăr, Teoria numerelor, Aritmetica superioară, această „Regină a Matematicei", a ieșit fundamental transfigurată și s'a desvoltat în direcții cu totul neașteptate și fecunde de rezultate, ajungând la un grad de perfecțiune ce o așează pe același piedestal cu cele mai sublime opere de artă, grație lucrărilor marelui *Gauss* și contribuțiilor prețioase ale matematicienilor *Dirichlet, Eisenstein, Jacobi, Kummer, Minkowski*, ș. a.

Algebra se îmbogățește cu teorii cu totul noui și extrem de pr mițătoare, având la bază concepții profunde de substituție, grup, formă algebrică, numere complexe cu mai multe unități ș. a., grație geniilor unui *Abel* și unui *Galois*; iar teoria ecuațiilor numerice, prin lucrările lui *Sturm*, reușește să dea un impuls Matematicei pure și aplicate, grație teoremei, care-i poartă numele, de separație a rădăcinilor unei ecuații numerice de orice grad.

In cadrul mișcării numită „Aritmetizarea Matematicei", *Dedekind, Kronecker, G. Cantor*, ș. a, prin precizările noțiunii despre număr și prin introducerea studiului sistematic al ramurei de Matematică numită Teoria ansamblelor pun bazele Teoriei funcțiilor de variabilă reală și contribuie, ținând cont de aportul esențial adus de lucrările fundamentale ale lui *Abel, Cauchy, Jacobi, Riemann, Weierstrass* ș a., la întărirea și cristalizarea tinerei Teorii a funcțiilor de variabilă complexă. In cadrul acestei din urmă teorii, tocmai atunci când s'au constituit mijloacele pentru cercetarea întinselor clase de funcții foarte importante (funcții sferice, abeliene, kleiniene, fuchsiene ș. a.), se situiază lucrările asupra funcțiunilor analitice uniforme care i-au adus în lumea matematică celebritatea lui *Mittag-Leffler*.

Inspirat de un memoriu profund — astăzi clasic — al marelui matematician *Weierstrass* asupra teoremelor de existență și a reprezentării prin produse a funcțiilor întregi având zeruri fixate dinainte sau a funcțiilor meroforme cu zeruri și poluri date în prealabil[9], *Mittag-Leffler* generalizează rezultatele lui *Weierstrass*, ajungând la celebra teoremă, care-i poartă numele, asupra desvoltării în fracții simple a funcțiunilor meromorfe. Importanța acestei teoreme a fost relevată fără întârziere de *Weierstrass* însuși, care-i dădu o demonstrație proprie și o îmbogăți cu alte extensiuni cuprinzătoare.

Astăzi, teorema lui *Mittag Leffler*, cunoscută în ansamblul ei sub numele de „steaua lui *Mittag-Leffler*" relativă la reprezentarea funcțiilor analitice devenind baza numeroaselor aplicații și teorii noui, se consideră ca o achiziție clasică a științei și de aceea este întrodusă în orice tratat fundamental modern de Teoria funcțiilor de variabilă complexă. Asupra aceluiași argument al cărui progrese esențiale au necesitat sclipiri de geniu și asupra argumentelor înrudite (funcții eliptice), *Mittag-Leffler* a continuat să mediteze toată viața sa, așa cum ne arată ansamblul memoriilor sale profunde intitulate „*Sur la représentation analytique d'une*

[9]) „Zur theorie der eindeutigen analytischen Funcktionen", Abh. Berlin, 1876, Ibid. Werke.

branche uniforme d'une fonction monogène"[10], izvorul cercetărilor moderne a multor matematicieni iluştri[11].

Celebrul savant şi distinsul diplomat al Curţii Regale Suedeze, *G. Mittag-Leffler* a fost totodată şi un admirabil profesor. Inaintea apariţiei lui *Mittag-Leffler* pe orizontul ştiinţei matematice, Suedia a dat puţine contribuţii esenţiale pentru desvoltarea acestei ştiinţe. *Mittag-Leffler* a promovat din răsputeri, între hotarele ţărilor scandinave, energiile latente ale generaţiilor tinere ale acestor naţiuni înrudite, pe care le-a iubit cu toată splendoarea inimii sale generoase, ştiind să-i incite la lucru de creaţie ştiinţifică înaltă.

In jurul catedrei sale la Stockholm, curând după instalarea sa acolo, a poposit un şir de elevi foarte talentaţi, dintre care mulţi deţin astăzi, în domeniul Matematicei, posturi dintre cele mai înalte. Maestrul *Mittag-Leffler* avea un dar cu totul excepţional să răpească auditorul său şi să-l încânte cu lucrurile şi subiectele ce le trata el. Orice lecţie era un eveniment ştiinţific şi studenţii săi se adunau plini de admiraţie şi de devotament în jurul profesorului lor mult iubit şi venerat.

Iubitor de tineret, în sensul cel mai profund şi cel mai frumos al acestui cuvânt, până la ultima clipă a existenţei sale pământeşti, promotor şi propovăduitor al ideei de înţelegere între popoare, şi pe de altă parte, luptător în vederea realizării unităţii politice naţionale, economice şi spirituale a nordului scandinavic, *Mittag-Leffler* ne apare ca o granitică figură reprezentativă a unei idei şi a unui caracter nobil şi exemplar demn de admiraţie. Una dintre cele mai frumoase trăsături de caracter ale acestui mare om era veneraţiunea şi devotamentul pe care le întreţinea faţă de bătrânul său profesor *Weierstrass*. *Mittag-Leffler* nu scăpa nici o ocazie pentru ca să ridice în slava cerului meritele acestuia[12]. Prin aceasta, „Elevul" *Mittag-Leffler* şi „Profesorul" său *Weierstrass* au dat lumii o imagine sublimă: primul, de credinţă şi lealitate faţă de profesorul său, cel de al doilea, de dragoste paternă şi de sentimente de aleasă cordialitate. iar amândoi, de stimă, de înţelegere şi de preţuire reciprocă.

Mittag-Leffler avea o convingere intimă că studiul Istoriei Matematicei, Istoriei acelei ştiinţe care constituie obiectul mândriei noastre legitime ca membri ai societăţii umane şi căreia îi datorăm prinosul nostru de admiraţie, de mulţumire şi de recunoştinţă ca indivizi, dacă nu va face ca matematicienii să devină prin acest studiu mai buni matematicieni, va permite, desigur, ca ei să devină mai înţelegători, mai împăciuitori, mai largi şi mai generoşi sufleteşte, le va îndulci, le va lumina spiritul şi va pune în evidenţă cele mai bune calităţi ale sensibilităţii şi ale inteligenţii lor, căci istoria Matematicei în particular, şi istoria gândirii ştiinţifice în general, are într'însa germenele unei umanităţi de o rezonanţă extrem de puternică. Deaceea, *Mittag Leffler* a promovat cu căldură şi cu pricepere studiul Istoriei Matematicei.

Lungi şi cordiale legături ce le-a avut *Mittag-Leffler* cu *Weierstrass* şi cu alţi matematicieni din timpul său, i-a îmbogăţit viziunea Istoriei Matematicei, mai ales în ramura lui de predilecţie, care era Analiza Matematică Memoriile lui *Mittag-Leffler* asupra Istoriei Analizei Matematice din timpul său, publicate în volumele 21, 25, 27 şi 39 din „Acta Mathematica", pot fi consultate cu mare profit de istoricii de astăzi a acestei ramuri de ştiinţă.

Spiritul şi vederile largi şi mai ales generoase ale lui *Mittag Leffler*, care au caracterizat întotdeauna pe cei mai luminaţi dintre oamenii de ştiinţă, au permis să se comită un act de dreptate, act, care — în cadrul problemelor de emancipare a femeilor — a anticipat prevederile legiuitorilor din unele ţări chiar şi cu o civilizaţie înaintată. In adevăr, în 1883, graţie unui sprijin puternic acordat de *G. Mittag-Leffler*, sprijin cu atât mai preţios cu cât părea revoluţionar faţă de concepţiile învechite şi prea rigide ale timpului, o femee, vestita matematiciană,elevă a marelui *Weierstrass*, *Sofia Kowalevski*, fiica generalului rus *Corvin-Krukowski* şi prin aceasta — se zice — descendentă a lui *Matei Corvin*, Regele Ungariei, a reuşit să obţină — una dintre primele femei în lume — o catedră

---

[10]) A. M. 23, 24, 26, 29, 42 (apărute între anii 1900—1920).

[11]) A se vedea. de exemplu, *L. Bieberbach*, „Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variabeln", Encykl. d. math. Wiss. II C 4,445—460.

[12]) „Une page de la vie de Weierstrass'. C. R. 2-ième congr. intern. math. Paris, 1902, 131—153; „Die ersten 40 ahre des Lebens von Weierstrass", A. M., 39 (1923), 1—7; „Weierstrass", A. M., 21 (1897), 79—82.

de Matematică la Universitatea din Stockholm. Cu ocazia dispariţiei premature a celebrei matematiciene şi apreciatei scriitoare *S. Kowalevski*[13]. *Mittag-Leffler* a scris, îndurerat, multe pagini frumoase[14]. Cu acest prilej, *Mittag-Leffler* a ridicat şi o chestiune care trebuie să intereseze în cel mai înalt grad Teoria cunoaşterii. Pornind dela constatarea că geniul matematic şi geniul artistic se ating, sunt strâns înrudite, — constatare, în sprijinul căreia se pot aduce exemple impresionante din Istoria gândirii omeneşti prin citarea unui *Leonardo da Vinci*, unui *Leon Battista Alberti*, unui *Galileo Galilei*, unui *Albrecht Dürer*, unei *Goethe*, unei *Maxwell*, unui *D'Alembert*, unui *Lomonosov*, ş. a., *Mittag-Leffler* cere să se dea o explicaţie de ce totuşi aceste două feluri de genialitate se desvoltă aşa de rar în acelaşi om?

Lista lucrărilor ştiinţifice ale lui *Mittag-Leffler* cuprinde 119 memorii şi articole originale şi se găseşte publicată de dl. *Nörlund* în vol. 50 din „Acta Mathematica". Lucrările sale au fost apreciate aşa de mult de lumea savantă, încât datorită lor *Mittag-Leffler* a obţinut proclamarea ca doctor honoris causa al Universităţilor din Bologna (1888), Oxford (1894), Cambridge (1899), Christiania (1902), Aberdeen (1906), Andrews (1911). In acelaş timp, *Mittag-Leffler* a fost consacrat în calitate de membru titular sau membru corespondent la un număr impresionant de 45 de Academii de ştiinţe din cele mai civilizate ţări ale lumii. Astfel, în anul 1878, *Mittag-Leffler* la vârsta de 32 ani, îşi inaugurează seria lungă şi strălucită de cooptări în sânul Academiilor de ştiinţe fiind proclamat membru corespondent al Academiilor din Göttingen şi din Helsingfors. Proclamarea sa, în anii 1925—1926, ca membru corespondent al Academiei Pontificale *Novi Lyncaei* şi ca membru onorar al Academiei de Ştiinţe din Leningrad, coincide cu apusul activităţii şi carierei sale măreţe.

La congresele internaţionale ale matematicienilor, *Mittag-Leffler*, stimat şi venerat de reprezentaţii lumii matematice, a fost ales în mai multe rânduri preşedinte sau vice-preşedinte al acestora şi a contribuit mult la succesul lor. A bine meritat dela naţiunile nordice, punând bazele, cu spiritul său minunat de iniţiativă insufleţită, congreselor matematicienilor scandinavi, al căror suflet a fost.

Iată atâtea mărturii de glorie, atâtea indemnuri la fericire, pentru un om a cărui credinţa mistică în frumuseţea morală a misiunii sale şi a rolului său au dat naştere la atâtea opere pozitive şi desinteresate!

* * *

Matematica mult mai mult decât alte ştiinţe, pretinde o imaginaţie puternică şi un talent special acelora care sunt chemaţi să facă să crească prin noui cuceriri domeniul ei. Claritatea gândului n'a făcut niciodată numai prin ea însăşi descoperiri noui. Cea mai bună operă de Matematică este o operă de artă, de artă sublimă, înaltă şi perfectă, îndrăzneaţă ca visurile cele mai intime ale imaginaţiei celor mai aleşi dintre semenii noştri, clară şi limpede ca şi gândul abstract. Quintesanţă a gândului abstract, *Mittag-Leffler*[15] a văzut-o în noţiunea de număr. Apologia numărului *Mittag-Leffler* a făcut-o promovând ştiinţa sa predilectă Matematica, cu toată intensitatea puterilor sale spirituale. Apologia numărului *Mittag-Leffler* a căutat să o propage în straturile mai largi ale societăţii, făcând să se graveze pe poarta masivă de la intrare în fostul său castel din Djursholm, actualmente Institutul Matematic „*Mittag-Leffler*", o inscripţie a cărei idee se împlântă în cugetările „miracolului grec", — care, în limba noastră, ar suna astfel:

„Numărul este începutul şi sfârşitul cugetării,
Numărul s'a născut odată cu gândul,
Dincolo de număr cugetarea nu poate oferi nimic".

---

[13]) Pentru viaţa impresionantă şi opera matematicienei *Sofia Kowalevski*, a se vedea în literatura noastă ştiinţifică, *Vera Myller*, Rev. Şt. „V. Adamachi", Iaşi, 3 (1912).

[14]) „*Weierstrass* et *Sonja Kowalevski*", A. M., 39 (1923), 133—198.

[15]) Multe scrisori până astăzi inedite, care interesează Istoria Matematicei moderne şi aruncă, în particular, noui şi frumoase raze de lumină asupra lui *Mittag-Leffler*, *Sofia Kowalevski* — prietenă intimă *Anne Charlotte Leffler de Cajanello*, şi alţi matematicieni ai timpului nostru, se găsesc la Neapole, în comoara artistică a familii marchizului şi astăzi regretatului profesor *Del Pezzo*.

SOLUȚII ÎNTREGI ALE ECUAȚIILOR

DE

SILAȘ GEORGE.

În multe probleme technice e necesar ca soluțiile sistemelor de ecuații obținute să fie numere întregi. Cum, în general, soluțiile sistemelor nu sunt întregi, vom da o nouă definiție soluției întregi a unui sistem, care folosește necesităților technice.

Fie:

$$(1) \qquad f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, p$$

un sistem de p ecuații oarecari cu n necunoscute. Nu punem nici-o condiție numerelor n și p.

Vom numi soluție întreagă a sistemului (1) numerele întregi $X_1, X_2, \ldots, X_n$ în așa fel ca valorile: $f_i(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ pentru $i = 1, 2, \ldots, p$ să fie zero sau cele mai apropiate posibil de zero. În general, soluția întreagă obținută conform definiției de mai sus nu anulează funcțiunile f_i, ci valorile numerice respective sunt cele mai apropiate posibil de zero. Pentru acest motiv, când se va cere soluția întreagă a unui sistem, vom scrie sistemul astfel:

$$(2) \qquad f_i(X_1, X_2, \ldots, X_n) \simeq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

semnul $\simeq$ citindu-se: „egal cu zero sau cel mai apropiat posibil de zero". La fel convenim ca soluțiile întregi să le notăm cu litere mari.

Să studiem în cele ce urmează cazul $p=1$, $n=1$.

Problema revine a găsi soluția întreagă a ecuației

$$(3) \qquad f(X) \simeq 0,$$

$f(x)$ fiind o funcție oarecare de x.

a) Dacă printre rădăcinile ecuației $f(x)=0$ există și numere întregi: X_i, X_k, ... aceste valori vor fi soluțiile întregi ale ecuației $f(X) \simeq 0$.

b) Dacă printre rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ nu este nici-un număr întreg, vom căuta numărul întreg X, care face ca $f(X)$ să fie valoarea cea mai apropiată posibil de zero.

Cu alte cuvinte, considerând mulțimea valorilor absolute ale lui $f(x)$ ce corespund numerelor întregi, problema noastră este a determina numărul întreg X ce corespunde limitei inferioare a acestei mulțimi.

Vom proceda în felul următor:

Considerăm funcția $y = f(x)$. Intervalele de existență ale acestei funcții pot fi împărțite în intervale în care funcția să fie continuu crescătoare sau continuu descrescătoare. Aceste intervale sunt separate între ele prin valori care dau pentru funcție: maxime, minime, puncte de discontinuitate sau de întoarcere.

Să ne ocupăm întâi de intervalele în care funcția este continuu crescătoare. Pentru ușurarea studiului problemei, împărțim aceste intervale în 3 categorii:

Categoria 1-a. În aceste intervale funcția începe creșterea dela o valoare negativă, care poate fi $-\infty$ sau o valoare finită negativă (un minim negativ sau o valoare negativă corespunzătoare unui punct de discontinuitate sau întoarcere) și ajunge la o valoare finită negativă (maxim negativ, punct de discontinuitate sau de întoarcere.

Categoria 2-a. In aceste intervale funcția începe creșterea ca și în cazul intervalelor din categoria 1-a, dar trece prin zero și ajunge la o valoare pozitivă (maxim pozitiv, punct de discontinuitate sau de întoarcere sau $+\infty$).

Categoria 3-a. In aceste intervale funcția începe creșterea dela o valoare finită pozitivă (minim pozitiv, punct de discontinuitate sau de întoarcere) și ajunge la o valoare pozitivă (maxim pozitiv, punct de discontinuitate sau de întoarcere, $+\infty$).

In fiecare din intervalele din fiecare categorie, vom căuta numărul întreg X care face ca valoarea $f(X)$ să fie cea mai apropiată posibil de zero dintre toate valorile $f(X)$ corespunzătoare numerelor întregi din acel interval.

α) Intr'un interval de categoria 1-a numărul întreg X care să satisfacă problemei de mai sus este sau extremitatea dreaptă a intervalului, dacă această extremitate e număr întreg, pentru care am, văzut că avem un maxim negativ, punct de discontinuitate sau de întoarcere, sau dacă nu e întreg, atunci numărul întreg imediat mai mic decât această extremitate, dacă în interval se află cel puțin un număr întreg.

β) Intr'un interval de categoria 2-a numărul întreg X căutat este unul din numerele întregi care încadrează rădăcina ecuației $f(x) = 0$, dacă în interval există numere întregi.

γ) Intr'un interval de categoria 3-a, valoarea întreagă X căutată este sau extremitatea stângă a intervalului, dacă este număr întreg și pentru care

am văzut că avem minim pozitiv, punct de discontinuitate sau de întoarcere sau dacă nu e întreg, atunci numărul întreg imediat mai mare ca această extremitate, dacă în interval se află cel puțin un număr întreg.

In mod analog vom rezolva aceeaș problemă pentru fiecare interval în care funcția este continuu descrescătoare și pentru intervalele de acest fel obținem rezultatele următoare:

α') Numărul întreg X căutat este extremitatea dreaptă a intervalului dacă pentru această extremitate avem minim pozitiv, punct de discontinuitate sau de întoarcere cu valorile respective pozitive și dacă această extremitate este număr întreg, iar dacă nu, atunci numărul întreg imediat mai mic decât această extremitate, dacă în interval se află cel puțin un număr întreg.

β') Numărul întreg X căutat este unul din numerele întregi ce încadrează rădăcina ecuației $f(x)=0$, dacă în interval există numere întregi.

γ') Numărul întreg X căutat este extremitatea stângă a intervalului, dacă pentru această extremitate avem maxim negativ, punct de discontinuitate sau de întoarcere cu valorile respective negative și dacă această extremitate este număr întreg, sau dacă nu atunci numărul întreg imediat mai mare decât această extremitate, în caz că în interval se află cel puțin un număr întreg.

In felul acesta pentru fiecare interval în care funcția este continuu crescătoare sau continuu descrescătoare am obținut un număr întreg X. Dintre toate aceste numere întregi acela care face ca $f(X)$ să fie cel mai apropiat de zero va constitui soluția întreagă a ecuației $f(X)\simeq 0$.

Sintetizând rezultatele obținute pentru aflarea valorii X în fiecare interval și combinând rezultatele α) cu γ'), γ) cu α'), β) cu β'), constatăm că soluția întreagă a ecuației $f(X)\simeq 0$ se află printre numerele întregi următoare:

1. Numerele întregi pentru care funcția $f(X)$ devine maxim negativ, minim pozitiv, sau prezintă punct de discontinuitate cu valoarea respectivă finită sau punct de întoarcere.

2. Vom considera maximele negative, minimele pozitive și punctele de discontinuitate ori de întoarcere care nu corespund la numere întregi. Fie x unul din aceste numere. Vom considera pentru problema noastră numărul întreg imediat mai mic și cel imediat mai mare decât x, cu condiția ca aceste numere să se afle în intervale alăturate, despărțite prin x.

3. Numerele întregi ce încadrează fiecare rădăcină a ecuației $f(x)=0$, cu condiția ca fiecare din aceste numere să se afle în intervalul în care este rădăcina.

Dintre toate numerele întregi obținute, se ia numărul X așa ca $f(X)$ să fie cel mai apropiat de zero și acesta constitue soluția întreagă a ecuației.

Se vede imediat că ecuația $f(X)\simeq 0$ poate să aibă mai multe soluții întregi. Intr'adevăr X_1 fiind o soluție întreagă și având:

$$f(X_1)=f(X_2)=-f(X_3),$$

unde X_2 și X_3 sunt întregi, și X_2 și X_3 sunt soluții întregi.

Exemple Să se afle soluțiile întregi ale ecuațiilor:

1) $$x^2-5x+7\simeq 0.$$

2) $$500x^3-3900x^2+1500x-149\simeq 0.$$

3) $$\frac{x^2-5}{3x+2}\simeq 0.$$

1) $x^2-5x+7=0$ are rădăcini imaginare.

Considerăm funcția $y=x^2-5x+7$, care în intervalul $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)$ este continuu descrescătoare și în intervalul $\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$ este continuu crescătoare Pentru $x=\frac{5}{2}$ are un minim pozitiv.

Valorile întregi ce încadrează pe $\frac{5}{2}$ sunt 2 și 3, din intervale alăturate

$$y(2)=1 \quad \text{și} \quad y(3)=1.$$

Soluțiile întregi ale ecuației $x^2-5x+7\simeq 0$ sunt 2 și 3.

2) Funcția $y=500x^3-3900x^2+1500x-149$ are o rădăcină reală cuprinsă între 7 și 8.

Rădăcinile derivatei sunt date de ecuația:

$$5x^2-26x+5=0,$$

$$x_1=\frac{1}{5}, \qquad x_2=5.$$

În intervalele $\left(-\infty, \frac{1}{5}\right)$ și $(5, +\infty)$ funcția y crește și în intervalul $\left(\frac{1}{5}, 5\right)$ descrește.

Pentru $x_1 = \frac{1}{5}$ funcția devine maxim negativ egal cu -1.

Numerele întregi ce încadrează pe $\frac{1}{5}$ și rădăcina sunt 0, 1, 7 și 8

$$y(0) = -149, \quad y(1) = -2049,$$
$$y(7) = -9249, \quad y(8) = 18251.$$

$X = 0$ este soluția întreagă a ecuației.

3) Considerăm funcția $Y = \frac{x^2-5}{3x+2}$, care este discontinuă și ia valori infinit de mari pentru $x = -\frac{2}{3}$. Derivata fiind mereu pozitivă singurele intervale de considerat sunt

$$\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \text{ și } \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$$

Rădăcinile ecuației $\frac{x^2-5}{3x+2} = 0$ sunt $x = \pm\sqrt{5}$.

Numerele întregi ce încadrează pe $-\sqrt{5}$ sunt -2 și -3 ambele în același interval cu $-\sqrt{5}$, la fel 2 și 3 încadrează pe $\sqrt{5}$

$$y(-3) = -\frac{4}{7}, \qquad y(-2) = \frac{1}{4},$$

$$y(2) = -\frac{1}{8}, \qquad y(3) = \frac{4}{11},$$

2 este soluția întreagă a ecuației.

În cazul particular când $f(x)$ este un polinom cu coeficienți întregi, dacă X e întreg și $f(X)$ va fi întreg. A afla soluția întreagă a ecuației $f(X) \simeq 0$ înseamnă a afla întregul X care face ca $f(X)$ să fie întregul cel mai apropiat posibil de zero.

Vom rezolva deci ecuația:

$$f(x) = \pm\alpha, \qquad \alpha = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

considerând valorile lui α pe rând, până vom obține o ecuație care are cel puțin o rădăcină număr întreg și acesta va fi soluția întreagă căutată.

Proprietăți. I. Considerăm $f(x) = \pm\alpha$, $f(x)$ fiind de gradul m, are cel mult m rădăcini. Deci ecuația $f(X) \simeq 0$ are cel mult m soluții întregi.

II. În baza celor stabilite mai sus se deduce ușor că ecuația de gradul 1: $ax + b \simeq 0$ are soluția întreagă întregul cei mai apropiat de rădăcina ecuației $ax + b = 0$.

Exemple. Să se găsească soluția întreagă a ecuațiilor:

1. $5x - 6 \simeq 0$, 2. $x^2 - 5x + 7 \simeq 0$

care am rezolvat-o mai sus.

1. Rădăcina ecuației $5x - 6 = 0$ este $\frac{6}{5}$.

Întregul cel mai apropiat de $\frac{6}{5}$ fiind 1, rezultă că soluția întreagă a ecuației $5x - 6 \simeq 0$ este 1.

2. Considerăm ecuația: $x^2 - 5x + 7 = \pm\alpha$.

Pentru $\alpha = 0$, $x^2 - 5x + 7 = 0$
are rădăcini imaginare.

Pentru $\alpha = -1$, $x^2 - 5x + 8 = 0$
are rădăcini imaginare.

Pentru $\alpha = 1$, $x^2 - 5x + 6 = 0$
are rădăcinile 2 și 3.

2 și 3 sunt soluțiile întregi ale ecuației.

Mă voiu opri puțin și asupra cazului $p=1$, $n>1$. Sistemul (2) devine

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_n) \simeq 0.$$

Voiu presupune mai mult că f este o funcție lineară cu coeficienți întregi de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ așa că sistemul devine:

$$(4) \qquad aX_1 + bX_2 + \cdots + lX_n \simeq m.$$

Suntem în cazul ecuațiilor diofantiene.

Se știe că dacă c. m. m. d. c. al numerelor $a, b, \ldots, l$ este 1, atunci se pot determina o infinitate de soluții întregi $X_1, X_2, \ldots, X_n$ în așa fel ca să avem:

$$aX_1 + bX_2 + \cdots + lX_n = m.$$

În cazul când după simplificarea ecuației (4), numerele întregi $a, b, \ldots, l$ au c. m. m. d. c. numărul $d \neq 1$ și d nu divide pe m se știe că ecuația diofantiană

$$(5) \qquad ax_1 + by_2 + \cdots + lx_n = m$$

nu are soluție întreagă.

În acest caz ecuația (5) se poate scrie

$$a'x_1 + b'x_2 + \cdots + l'x_n = \frac{m}{d}.$$

Soluția întreagă a acestei ecuații vom defini-o tot ca mai sus, adică numerele $X_1, X_2, \ldots, X_n$, cari fac membrul prim cel mai apropiat posibil de membrul 2. Valoarea numerică a membrului prim este întreg, deci considerând numărul întreg m' cel mai apropiat de fracția $\frac{m}{d}$, vom avea de rezolvat în numere întregi ecuația diofantiană

$$a' x_1 + b' x_2 + \cdots + l' x_n = m'.$$

În acest caz $a', b', \ldots, l'$ având c. m. m. d. c. egal cu 1, ecuația are o infinitate de soluții întregi.

NOTE MATEMATICE

9. — *Problème.*

Trouver une solution à deux paramètres du système

$$A_1, A_2, A_3 \overset{2,4}{=} B_1, B_2, B_3$$

les A_i et B_i étant des entiers positifs tels que $A_1 < A_2 < A_3$ et $B_1 < B_2 < B_3$ avec $A_3 \neq A_1 + A_2$ et $B_3 \neq B_1 + B_2$.

Solution. J'ai établi l'identité multiple

$$-2u^2 + 3uv, \; -3uv + 2v^2 \overset{1,3}{=}$$
$$-u^2 + uv + 2v^2, \; u^2 - 5uv + 4v^2, \; -2u^2 + 4uv - 4v^2.$$

J'applique à celle-ci le théorème:

„De l'égalité multigrade

$$a_1, a_2, \ldots, a_p \overset{x}{=} b_1, b_2, \ldots, b_q,$$

vraie pour $x = 1, 3, \ldots, 2n-1$, on déduit, quelle que soit t

$$a_1 + t, a_2 + t, \ldots, a_p + t, -b_1 + t, -b_2 + t, \ldots, -b_q + t \overset{y}{=}$$
$$-a_1 + t, -a_2 + t, \ldots, -a_p + t, b_1 + t, b_2 + t, \ldots, b_q + t$$

vraie pour $y = 2, 4 \ldots 2n-2, 2n$",

en faisant $t = u^2 - 3uv + v^2$, et il vient, en représentant par $[\alpha, \beta, \gamma]$ la forme quadratique $\alpha u^2 + \beta uv + \gamma v^2$,

$$[1, -6, 3], [2, -4, -1], [3, -7, 5] \overset{2,4}{=}$$
$$[1, -1, 3], [2, -8, 5], \quad [3, -6, 1].$$

Exemples numériques.

u	v		S_2	S_2
4	3	$9, 25, 29 \overset{2,4}{=} 15, 19, 31$	1.547	1.104.467
5	2	$6, 23, 25 \overset{2,4}{=} 10, 19, 27$	1.190	671.762
5	3	$15, 19, 38 \overset{2,4}{=} 6, 25, 37$	2.030	2.266.082

A. GLODEN

---

10. — *Sur le point de Feuerbach.*

1. Dans un triangle ABC inscrit dans un cercle (O), de rayon R, soient A_1, B_1, C_1 et D, E, F les milieux des côtés BC, CA, AB et les points où le cercle inscrit (I), de rayon r, touche les mêmes côtés; H′ l'orthocentre du triangle DEF situé, comme on sait, sur la droite OI.

2. Le foyer de la parabole (π) inscrite au triangle DEF et ayant la droite IH′ comme directrice est un certain point du cercle (I). Il est aisé de montrer que ce point se confond avec le point φ de *Feuerbach* du triangle ABC.

Les symétriques D_1, E_1, F_1 des points D, E, F, par rapport aux bissectrices AI, BI, CI du triangle sont, en effet, les sommets d'un triangle $D_1E_1F_1$ transformé du triangle $A_1B_1C_1$ par l'homothétie $\left(\varphi, r : \frac{R}{2}\right)$. Comme l'une des distances du point φ de *Feurbach* aux sommets du triangle $A_1B_1C_1$ égale la somme des deux autres, (théorème de *W. Godt*), il en est de même de l'une des distances de φ aux sommets du triangle $D_1E_1F_1$, de sorte que le point φ, situé sur le cercle (I) se confond avec l'orthopôle de la droite d'*Euler* du triangle anticomplémentaire $D_2E_2F_2$ de DEF, c'est-à-dire avec le foyer de (π), car le triangle $D_1E_1F_1$ est le triangle orthique du triangle $D_2E_2F_2$. Il en résulte aussi, en vertu du théorème de *W. Godt*, que *le point φ de Feuerbach du triangle* ABC *coincide avec le point de Feuerbach du triangle anticomplémentaire* $D_3E_3F_3$ *du triangle* $D_1E_1F_1$ *et que le cercle inscrit au triangle* $D_3E_3F_3$ *est tangent au cercle des neuf points du triangle* ABC *au point φ.*

V. THÉBAULT

11. — *Câteva locuri geometrice.*

Este cunoscut, în cazuri particulare, următorul gen de probleme: *în triunghiul* A B C, *vârfurile* A, B *sunt fixe, iar* C *descrie o curbă* (C). *Să se afle curba* (H), *locul geometric al ortocentrului.*

Luând ca axe coordonate latura AB de lungime $2a$ şi mediatoarea ei, fie $C(\alpha, \beta)$ şi $H(x, y)$. Avem relaţiile

$$x = \alpha. \quad \alpha x + \beta y = a^2;$$

prima exprimă că CH este perpendiculară pe AB; a doua că H este situat pe polara lui C faţă de cercul de diametru AB. Din aceste relaţii rezultă între C şi H *o transformare cremoniană* [1].

În rezumat, dacă C descrie curba (C) de ecuaţie $f(x, y) = 0$, H descrie curba (H) de ecuaţie

$$f\left(x, \frac{a^2 - x^2}{y}\right) = 0.$$

De exemplu: 1° *Dacă* (C) *este cercul de diametru* AB, (H) *coincide cu* (C).

2°. *Dacă* (C) *este o dreaptă* D, (H) *descrie o iperbolă trecând prin* A, B *cu asimptotele perpendiculare pe* AB *şi pe* D.

3°. *Dacă* (C) *este parabola* $x^2 + m y = a^2$, (H) *este dreapta* $y = m$.

4°. *Dacă* (C) *este elipsa* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, (H) *este elipsa* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2 y^2}{a^4} = 1$.

Căutând o legătură geometrică între curbele (C) şi (H), observăm că trecerea dela C la H este *o transformare cuadratică* faţă de conicele tangente în A şi B perpendicularelor A A′, B B′ pe A B [2]. Punctele singulare ale transformării sunt A, B şi punctul la infinit I al perpendicularei pe AB.

Din structura particulară a problemei de faţă rezultă că la direcţiile asimptotice ale curbei (C) corespund direcţii asimptotice perpendiculare pentru (H). La punctele de intersecţie ale curbei (C) cu dreapta AB corespund puncte la infinit, în I, pentru (H). Dar cele mai frumoase propoziţii rezultă din considerarea în general, a transformării cuadratice [3]. Astfel

a) *Transformata unei dreapte* D *oarecare este o conică ce trece prin* A, B, I. *Dacă dreapta trece prin* A, *transfarmata* (H) *se descompune în* A A′ *şi perpendiculara din* B *pe* D.

b) *Reciproc, transformata unei iperbole ce trece prin* A, B *de direcţie asimptotică perpendiculară pe* A B, *este o dreaptă.*

c) *Transformata unei conice este o curbă de clasa patra, admiţând pe* A, B, I *ca puncte duble.*

d) *Transformata unei conice care trece prin* A, B *sau* I *este o cubică admiţând acest punct ca punct dublu.*

e) *Transformata unei conice care trece prin două din punctele* A, B, I *este o conică trecând prin aceste puncte.*

N. N MIHAILEANU

[1]) Care coincide adică, cu transformarea dela H la C.

[2]) Adică polarele lui $C(\alpha, \beta)$ faţă de conicele

$$(\lambda) \qquad x^2 + \lambda y^2 = a^2$$

sunt concurente în H. Se observă că transformata unei curbe (λ) este curba $(1 : \lambda)$.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul LI, No. 9, Mai 1946 Rezultatul Concursului „Gazetei Matematice" din anul 1946, de *O. N. Ţino*. Câteva consideraţiuni din Geometria triunghiului, de *Iulian Petrescu*. Mişcarea pe plane înclinate ţinând seama de frecare şi de rezistenţa aerului, de *Gabriela Ţiţeica*. Institutul de Ştiinţe Matematice, de *V. Vâlcovici*. Raportul pentru premiul de algebră „*A. G. Ioachimescu*", de *N Abramescu, Th. Angheluţă* şi *P. Sergescu*. Note Matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. *A. Gloden*. Sobre el análisis diofántico multigrado.

3. *Gh Th. Gheorghiu*. 64 de examene de admitere la Politehnicele din România. Este un volum litografiat de 273 pagini, care cuprinde 578 probleme de Geometrie plană şi în spaţiu de Geometrie Analitică, de Algebră şi de Mecanică. Acest volum interesant este de mare folos pentru elevii de liceu curs superior, pentru candidaţii care se prezintă la intrarea în Politehnică şi chiar pentru d-nii profesori de matematici. O recomandăm călduros celor cărora se adresează

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1159. — *Se construeşte dreptunghiul* $B B_a C_a C$ *a cărui latură* $B_a C_a$ *trece prin vârful* A *al triunghiului* ABC. *Să se demonstreze că acest dreptunghiu este echivalent cu fiecare din dreptunghiurile* $A B_c A_c B$, $C C_a A_b A$ construite în mod analog.

G L GH. BUICLIU

[3]) *Ch. Michel*: *Compléments de Géométrie moderne* pag. 53 şi u.

Soluţie. Daca a, b, c, h_a, h_b, h_c sunt laturile şi înălţimele triunghiului ABC, iar S suprafaţa lui se vede imediat că chiar din construcţie avem

$$\text{Supr. } B\,B_a\,C_a\,C = a \times h_a = 2\,S,$$

$$\text{Supr. } A\,B_c\,A_c\,B = c \times h_c = 2\,S,$$

$$\text{Supr. } C\,C_b\,C_b\,A = b \times h_b = 2\,S.$$

Această foarte simplă problemă a fost atacată numai de D-l *Popa Nicolae* (Cl V, Liceul Beiuş) descompunând figura în diferite suprafeţe echivalente.

Problema 2160 — *Să se găsească coeficientul lui* $\cos^6 x$ *din desvoltarea expresiei*

$$E = \sum_1^{10} \cos^2 n\,x$$

după puterile lui $\cos x$.

ADRIAN POPESCU

Soluţie. În baza relaţiei cunoscute

$$\cos^2 n\,x = \frac{1 + \cos 2n\,x}{2},$$

expresia dată se poate scri

$$E = 5 + \frac{1}{2} \sum_1^{10} \cos 2n\,x. \tag{1}$$

Dar,

$$\cos n\,x = \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} x \sin^4 x - C_n^6 \cos^{n-6} \sin^6 x + \cdots$$

(*Hütte*, p 75) şi făcând înlocuirea $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, găsim succesiv

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1,$$

$$\cos 4x = \cos^4 - 6\cos^2 x(1 - \cos^2 x) + (1 - \cos^2 x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1,$$

$$\cos 6x = \cos^6 x - 15\cos^4 x(1 - \cos^2 x) + 15\cos^2 x(1 - \cos^2 x)^2 - (1 - \cos^2 x)^3$$
$$= 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1,$$

$$\cos 8x = \cos^8 x - 28\cos^6 x(1 - \cos^2 x) + 70\cos^4 x(1 - \cos^2 x)^2 - 28\cos^2 x(1 - \cos^2 x)^3 + (1 - \cos^2 x)^4$$
$$= 128\cos^8 x - 256\cos^6 x + \cdots$$

$$\cos 10x = \cos^{10} x - 45\cos^8 x(1 - \cos^2 x) + 210\cos^6 x(1 - \cos^2 x)^2 - 210\cos^4 x(1 - \cos^2 x)^3 +$$
$$45\cos^2 x(1 - \cos^2 x)^4 - (1 - \cos^2 x)^5 = \cdots + 1120\cos^6 x - \cdots$$

$$\cos 12x = \cos^{12} - 66\cos^{10} x(1 - \cos^2 x) + 495\cos^8 x(1 - \cos^2 x)^2 - 924\cos^6 x(1 - \cos^2 x)^3 +$$
$$495\cos^4 x(1 - \cos^2 x)^4 - 66\cos^2 x(1 - \cos^2 x)^5 + (1 - \cos^2 x)^6 = \cdots - 3584\cos^6 x + \cdots$$

$$\cos 14x = \cos^{14} x - 91\cos^{12} x(1 - \cos^2 x) + 1001\cos^{10} x(1 - \cos^2 x)^2 - 3003\cos^8 x(1 - \cos^2 x)^3 +$$
$$3003\cos^6 x(1 - \cos^2 x)^4 - 1001\cos^4 x(1 - \cos^2 x)^5 + 91\cos^2 x(1 - \cos^2 x)^6 - (1 - \cos^2 x)^7$$
$$= \cdots + 9408\cos^6 x - \cdots$$

$$\cos 16x = \cos^{16} x - 120\cos^{14} x(1 - \cos^2 x) + 1820\cos^{12} x(1 - \cos^2 x)^2 - 8008\cos^{10} x(1 - \cos^2 x)^3 +$$
$$13070\cos^8 x(1 - \cos^2 x)^4 - 8008\cos^6 x(1 - \cos^2 x)^5 + 1820\cos^4 x(1 - \cos^2 x)^6 -$$
$$120\cos^2 x(1 - \cos^2 x)^7 + (1 - \cos^2 x)^8 = \cdots - 21504\cos^6 x + \cdots$$

$$\cos 18x = \cos^{18} x - 153\cos^{16} x(1 - \cos^2 x) + 3060\cos^{14} x(1 - \cos^2 x)^2 - 18564\cos^{12} x(1 - \cos^2 x)^3 +$$
$$43758(1 - \cos^2 x)^4 - 43758\cos^8 x(1 - \cos^2 x)^5 + 18564\cos^6 x(1 - \cos^2 x)^6 -$$
$$3060\cos^4 x(1 - \cos^2 x)^7 + 153(1 - \cos^2 x)^8 - (1 - \cos^2 x)^9 = \cdots + 44352\cos^6 x - \cdots$$

$$\cos 20x = \cos^{20} x - 190\cos^{18} x(1 - \cos^2 x) + 4845\cos^{16} x(1 - \cos^2 x)^2 - 38760\cos^{14} x(1 - \cos^2 x)^3 +$$
$$125970\cos^{12} x(1 - \cos^2 x)^4 - 184756\cos^{10} x(1 - \cos^2 x)^5 + 125970\cos^8 x(1 - \cos^2 x)^6$$
$$- 38970\cos^6 x(1 - \cos^2 x)^7 + 4845\cos^4 x(1 - \cos^2 x)^8 - 190\cos^2 x(1 - \cos^2 x)^9 + (1 - \cos^2 x)^{10}$$
$$= \cdots - 84480\cos^6 x - \cdots$$

Adunând aceste relaţii şi punând în evidenţă numai coeficienţii lui $\cos^6 x$, avem

$$\sum_{1}^{10}\cos 2nx = \cdots + (32-256+1120-3681+9408-21504+44352-84480)\cos^6 x - \cdots$$

$$= \cdots + (54912 - 109824)\cos^6 x - \cdots = \cdots - 54912\cos^6 x - \cdots$$

De aci rezultă, privind relația (1) că termenul în $\cos^6 x$ are coeficientul — 27456.

Soluție dată de d-nii: *Bolcas Victor* (Polit., Timișoara și *Bossie Boris* (Polit, Timișoara).
S'au primit și câteva soluții greșite.

Problema 2347. — *Să se arate că într'un triunghiu isoscel* A B C (C = B), *avem relația*

$$\frac{b^m \sin^p C - c^m \sin^p B}{b^n \cos^q C - c^n \cos^q B} = \frac{(m-p)\,b^{m-n}}{n\cos^2 B + q\sin^2 B}\cdot\frac{\sin^p B}{\cos^{q-2} B}.$$

V. ALACI

Prima soluție. In cazul triunghiului isoscel, având $c = b$, C = B, observăm că primul membru ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$ și că aceste valori ($c = b$, C = B) sunt în același timp soluții ale ecuației

$$c\sin B - b\sin C = 0.$$

S'a stabilit însă[1]) că: Adevărata valoare a unei expresii de forma

$$u = \frac{f(x,y)}{\varphi(x,y)},$$

care ia forma $\frac{0}{0}$ pentru $x = x_1$, $y = y_1$, soluții ale ecuației

$$\psi(x,y) = 0,$$

este câtul determinaților funcționali ai funcțiilor $f(x,y)$, $\psi(x,y)$ și $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ pentru $x = x_1$ $y = y_1$, adică

$$(1)\qquad u = \left[\frac{D(f,\psi)}{D(x,y)} : \frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}\right]_{\substack{x=x_1\\ y=y_1}}.$$

Observând că în cazul nostru $x = c$, $y = C$, $x_1 = b$, $y_1 = B$,

$$f(x,y) = b^m \sin^p C - c^m \sin^p B,$$
$$\varphi(x,y) = b^n \cos^q C - c^n \cos^q B,$$
$$\psi(x,y) = c\sin B - \sin C,$$

și notând cu E primul membru al relației din enunț, avem succesiv

$$E = \left[\frac{\begin{vmatrix} -mc^{m-1}\sin^p B & pc^m \sin^{p-1} C\cos C \\ \sin B & -b\cos C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -nc^{-1}\cos^q B & -qc^n\cos^{q-1}\sin C \\ \sin B & -b\cos C \end{vmatrix}}\right] = \frac{b^{m-1}\sin^{p-1} B}{b^{n-1}\cos^{q-1} B}\cdot\frac{\begin{vmatrix} -m\sin B & pb\cos B \\ \sin B & -b\cos B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -n\cos B & -qb\sin B \\ \sin B & -b\cos B \end{vmatrix}}$$

$$= b^{m-n}\frac{\sin^p B\cos B}{\cos^{q-1} B}\cdot\frac{\begin{vmatrix} -m & pb \\ 1 & -b \end{vmatrix}}{b(n\cos^2 B + q\sin^2 B)} = b^{m-n}\frac{\sin^p B}{\cos^{q-2} B}\cdot\frac{bm - pb}{b(n\cos^2 B + q\sin^2 B)},$$

sau

$$E = \frac{(m-p)\,b^{m-n}}{n\cos^2 B + q\sin^2 B}\cdot\frac{\sin^p B}{\cos^{q-2} B}.$$

Astfel relația cerută este stabilită.

Soluții date de d-ra *Costin Alexandrina* (Polit., Timișoara) și de dnii: *Birănaș Ion* (Polit., Timișoara), *Constantinescu Ilie* (Polit., Timișoara), *Coțiu Aurel* (Liceul Beiuș), *Dobrișan Alexandru* (Polit., Timișoara), *Giurconiu Mihail* (Polit., Timișoara), *Gottard Francisc* (Polit., Timișoara), *Novac Ioan* (Lic. Brăila), *Pali Sergiu* (Polit., Timișoara), *Podrazcky Valer* (Lic. Loga Timișoara), *Popa Vasile* (Polit, Timișoara), *Popescu D-tru* (Polit., Timișoara), *Popovici Eugen Dan* (Polit., Timișoara), *Safta Nicolae*, *Stoian Anatol* (Pol. Timișoara), *Titero Ioan* (Polit, Timișoara) și *Zubac Vladimir* (Polit., Timișoara).

Soluția 2-a. In virtutea relației $c = \frac{b\sin C}{\sin B}$, dedusă din teorema sinusurilor, primul membru al relației din enunț, notat cu E, devine

$$E = \frac{\sin^p C\sin^m B - \sin^m C\sin^p B}{\cos^q C\sin^n B - \sin^n C\cos^q C}\cdot b^{m-n}\sin^{n-m} B.$$

[1]) *V. Alaci*: O clasă de forme nedeterminate, "R. M. T." Vol. IV. p. 20.

Ţinând seamă că triunghiul A B C este isoscel (C = B) primul factor din E, privit ca funcţie de singură variabilă C, ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$ şi atunci conform regulei lui *L'Hôspital*, adevărata valoare a lui E este

$$E=\left[\frac{p\sin^{p-1}C\cos C\sin^{m}B-m\sin^{n-1}C\cos C\sin^{p}B}{-q\cos^{q-1}C\cos C\sin^{n}B-n\sin^{n-1}C\cos C\cos^{q}B}\right]_{C=B} b^{m-n}\sin^{n-m}B=$$

$$\frac{(m-p)\sin^{m+p-1}B\cos B\sin^{n-m}B}{(m\cos^2 B+q\sin^2 B)\sin^{n-1}B\cos^{q-1}B}\cdot b^{m-n}=\frac{(m-p)\,b^{m-n}}{n\cos^2 B+q\sin^2 B}\cdot\frac{\sin^{p}B}{\cos^{q-2}B}.$$

Avem astfel stabilită relaţia din enunţ.

Soluţii date de d-nii: *Birănaş Ion* (Polit, Timişoara), *Giurconiu Mihail* (Polit., Timişoara), *Sasu Ioan* (Polit., Timişoara), *Serengău Mihai* (Polit, Timişoara) şi *Tincu C-tin* (Polit, Timişoara),

---

Problema 2355. — Dacă

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ şi } a^2=b^2+c^2,$$

atunci

$$a^2(b^4+c^2y^2)=b^2(a^4-c^2x^2).$$

N. N. MIHAILEANU

Soluţie. Prima relaţie adusă la forma întreagă, devine

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Inmulţind cu c^2 şi observând că din a 2-a relaţie dată deducem $c^2=a^2-b^2$, deci

$$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2=a^2b^2c^2=a^2b^2(a^2-b^2)=a^4b^2-a^2b^4.$$

Mai putem scri

$$a^2b^4+a^2c^2y^2=a^4b^2-b^2c^2x^2,$$

sau

$$a^2(b^4+c^2y^2)=b^2(a^4-c^2x^2),$$

care este tocmai relaţia cerută.

Soluţii date de d-nii: *Beschea Radu* (Polit, Bucureşti), *Birănaş Ioan* (Polit., Timişoara), *Bogza Mihai* (Lic Roman), *Brasch Andrei* (Polit., Timişoara), *Braşoveanu Gh.* (Colegiul Craiova), *Cârnaţiu Ion* (Polit., Timişoara), *Constantinescu Ilie* (Polit., Timişoara), *Coţiu Aurel* (Lic. Beiuş), *Dobrişan Alexandru* (Polit., Timişoara), *Dobrotescu Gh.* (Lic. Caracal), *Filimon Ioan* (Deva), *Frunză Radu* (Polit, Timişoara), *Giurconiu Mihail* (Polit., Timişoara), *Gottard Francisc* (Polit., Timişoara), *Grigore C. Gheorghe* (student), *Guttman Tiberiu* (Lic. Deva), *Haret Radu* (Bucureşti), *Ilea Vasile* (Polit., Timişoara), *Mitric Aurel* (Polit. Timişoara), *Novac Ioan* (Lic. Brăila), *Palade Dionisie* (Polit., Timişoara), *Pali Sergiu* (Polit, Timişoara), *Podracky Valer* (Lic. Loga), *Popa Vasile* (Polit, Timişoara), *Popescu D-tru* (Polit, Timişoara), *Prisăcaru Mircea* (Pol., Iaşi), *Safta Nicolae* (Caracal), *Sassu Ioan* (Polit., Timişoara), *Schiopu Ioan* (Polit., Timişoara), *Serengău Mihai* (Polit., Timişoara), *Stern Tiberiu* (Polit., Timişoara), *Stroescu Florea* (Lic. Caracal) *Teodorescu Petre* (Liceul Matei Basarab, Bucureşti), *Teiuşanu Horia* (Lic. Beiuş) şi *Tincu C-tin* (Polit. Timişoara).

Problema 2357. — *Intre rădăcinele* x_1, x_2, x_3 *ale ecuaţiei*

$$x^3+3x^2-3x+7=0,$$

avem relaţia

$$\frac{1+\sum_{i=1}^{3}\operatorname{arc\,tg}x_i}{1-\sum_{i=1}^{3}\operatorname{arc\,tg}x_i}=\frac{4+\pi}{4-\pi}.$$

ILIE CONSTANTINESCU

Soluţie. Fie,

$$(1)\quad E=\sum_{i=1}^{3}\operatorname{arc\,tg}x_i=\operatorname{arc\,tg}x_1+\operatorname{arc\,tg}x_2+\operatorname{arc\,tg}x_3$$

Luând tangenta în ambii membri şi desvoltând, avem

$$(2)\quad \operatorname{tg}E=\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}x_1+\operatorname{arc\,tg}x_2+\operatorname{arc\,tg}x_3)=\frac{x_1+x_2+x_3-x_1x_2x_3}{1-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1}.$$

Cum relaţiile cunoscute între rădăcinele unei ecuaţii şi coeficienţii ei, permit a scri pentru ecuaţia din enunţ,

$$x_1+x_2+x_3=-3,\quad x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-3,$$
$$x_1x_2x_3=-7.$$

relaţia (2) devine

$$\operatorname{tg}E=\frac{-3+7}{1+3}=1,$$

de unde rezultă

(2) $$E = \frac{\pi}{4}.$$

In virtutea acestei relații, primul membru al relației cerute, având în vedere notația (1) se poate scri

$$\frac{1+\sum_{i=1}^{3} \operatorname{arc\,tg} x_i}{1-\sum_{i=1}^{3} \operatorname{arg\,tg} x_i} = \frac{1+E}{1-E} = \frac{1-\frac{\pi}{4}}{1-\frac{\pi}{4}} = \frac{4+\pi}{4-\pi}.$$

Avem astfel stabilită relația cerută.

Soluții date de d-nii: *Arnăutu Marin* (Polit, Timișoara), *Balaniscu Chirică* (student, Cluj); *Birănaș Ioan* Polit., Timișoara), *Bogza Mihai* (Lic, Roman), *Filimon Ioan* (Liceul Deva), *Giurconiu Mihail* (Polit., Timiș ara), *Gottard Francisc* (Polit, Timișoara), *Ilea Vasile* (Polit., Timișoara), *Nad Duris Ioan* (Polit, Timișoara), *Novac Ioan* (Liceul Brăila), *Popescu D-tru* (Polit, Timișoara), *Popescu Barbu*, *Prisăcaru Mircea* (Polit., Iași), *Serengău Mihai* (Polit., Timișoara), *Tincu C-tin* (Polit., Timișoara), *Vlăduț C-tin* (Polit., Timișoara) și *Wegener Eugen* (București).

PROBLEME PROPUSE

2426. — Să se găsească un patrat perfect de patru cifre astfel că dacă se intervertesc cele două cifre din mijloc, numărul obținut este încă un patrat perfect, dar în sistemul de numerație de bază 9.

V. THÉBAULT

2427. — În cercul de centru O, diametrul MA se prelungește cu AB = R (raza cercului). Din B se duce tangenta BC la cerc care se prelungește cu DD = R. Se proiectează D în E pe MA. Să se arate că:

$$\frac{S(EDCO)}{S(ADB)} = \frac{6}{5+3\sqrt{3}}.$$

CPT. G P. BOERESCU

2428. — Să se construiască triunghiul ABC cunoscând piciorul D al bisectoarei AD și centrele ω, ω' ale cercurilor circumscrise triunghiurilor DAB și DAC.

G-L GH BUICLIU

2429. — Să se arate că

$$2\sin\frac{A+B}{3}\left(\sin\frac{A+B}{3}+\sqrt{3}\cos\frac{A+B}{3}\right)=4\cos^2\frac{C}{3}-1,$$

dacă $A+B+C=180^0$.

2430. — Să se arate că într'un triunghiu oarecare ABC, avem relațiile:

$$\frac{b\sin^2\frac{C}{2}+c\sin^2\frac{B}{2}}{b\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{B}{2}}=\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2},$$

$$\frac{b\cos\frac{C}{2}\sin^2\frac{C}{4}+c\cos\frac{B}{2}\sin^2\frac{B}{4}}{b\cos\frac{C}{2}\cos^2\frac{C}{2}+c\cos\frac{B}{2}\cos^2\frac{B}{4}}=\operatorname{tg}\frac{B}{4}\operatorname{tg}\frac{C}{4},$$

notațiile fiind cele obicinuite.

ILIE CONSTANTINESCU

2431. — Dacă într'un triunghiu ABC, rapoartele

$$\frac{r_a}{a},\ \frac{r_b}{b},\ \frac{r_c}{c}$$

sunt în progresie aritmetică, atunci avem și

$$\cos^3\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}=\cos^3\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}.$$

PETRE TEODORESCU

2432. — Să se stabilească relațiile

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 6x\sin x}{\sin 3x}dx=-\frac{18}{35},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^5 6x\sin^3 x}{\sin^3 3x}dx=-\frac{3544}{3465}.$$

V. ALACI

2433. — Coordonatele Timișoarei și a portului Chilian Valparaiso sunt:

$\varphi_1 = 45^0, 46'$ N $\varphi_2 = 33^0, 02'$ S
$\lambda_1 = 21^0, 15'$ E, $\lambda_2 = 71^0, 33'$ W.

Se cere: a) Coordonatele mijlocului distanței între două orașe. b) Din Timișoara, în ce direcție se află portul Valparaiso?

LT. C-DOR C V. COSTACHESCU

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Balaniscu Chirică (2250, 2276, 2348, 2363, 2396, 2399, 2413); *Boerescu G* (P.); *Buzoliu V.* (P; 2405); *Coman Liviu* (2413); *Constantinescu Ilie* (P); *Corduneanu C-tin* (2410, 2411); *Coţiu Aurel* (2103, 2276, 2358, 2350, 2383, 2390, 2404, 2405, 2406, 2413, 2416); *Dobrişan Aiexandru* (2391, 2401, 2403 2405, 2409, 2413); *Fleşeriu Eugen* (2387, 2399, 2416, 2419); *François* (P; 2403, 2404, 2405, 2406, 2407, 2408, 2409, 2410, 2411, 2413); *Gaicu Alexandru* (2410, 2413); *Gancea Constantin* (2396, 2413); *Gheţu Eugen* (2404, 2405, 2407, 2410, 2411, 2413, 2416, 2417); *Ghiţescu Virgil* (N., P.); *Guttmann Tiberiu* (2379, 2397); *Hagiu Ilie* (2387, 2391, 2401, 2403, 2405, 2406, 2409, 2413); *Mâncescu Ion* (2403, 2405); *Mărgineanu Ioan* (2416); *Nedelcu Ulpius* (2350, 2367, 2380, 2381, 2382, 2395, 2396, 2401, 2408, 2409); *Novac Ioan* (P; 2129, 2134, 2135, 2247, 2261, 2271, 2272, 2273, 2276, 2278, 2287, 2293, 2297, 2301, 2303, 2354, 2366, 2370, 2378, 2380, 2404, 2405, 2406, 2407, 2410, 2411, 2413, 2416, 2417); *Pisanca Ionel* (2401, 2413, 2418); *Popa Vasile* (2262, 2357, 2395, 2403, 2404, 2405, 2406, 2407, 2408, 2409, 2410, 2413, 2419, 2420, 2423); *Popescu Barbu* (1979, 1989, 2230, 2303, 2330, 2362, 2387, 2390, 2394, 2396, 2400, 2401, 2406, 2413); *Popovici Dan* (2391, 2401, 2403, 2405, 2409, 2413); *Stanciu Mihail* (P; 2410, 2418); *Székely Gh* (2403, 2405, 2410); *Titero Ioan* (2262, 2357, 2395, 2404, 2405, 2406, 2407, 2408, 2409, 2410, 2413, 2416, 2419, 2423); *Wegener Eugen* (P; 1832, 1833, 2074, 2100, 2201, 2293, 2345, 2353, 2374).

INFORMAŢIUNI

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, pentru a fi luate în consideraţie, trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Rugăm pe corespondenţii noştrii ca problemele propuse să fie însoţite de soluţiile corespunzătoare.

Legându-se colecţiileR. M. T., anii II–XXV, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 800 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II—XXV, cu preţul de lei 5000 volumul şi se trimet la cerere.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el. şi s'o iscălească.

ANUL XXVI. IULIE 1946 No. 5.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

BIBLIOTECA CENTRALĂ „LUCIAN BLAGA" SIBIU

REVISTA MATEMATICĂ DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 1000 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 8000 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRĂINĂTATE ESTE DE 20.000 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **N. MIHAILEANU:** COORDONATE ANALAGMATICE.
2 NOTE MATEMATICE 12, 13, 14.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 1161, 2182. 2339, 2342, 2350, 2359, 2364.
5. PROBLEME PROPUSE: 2362, 2118, 2435 - 2439.
6. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timişoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Pentru noui abonaţi, costul abonamentului pentru anul XXVI (15 Martie 1946 — 15 Februarie 1947) este de 8000 (opt mii) lei.

Cu plăcere anunţăm, că începând dela 15 Iulie 1946 mai face parte dintre membrii „R.M.T." şi D-l profesor ANASTASIE P. PETRESCU, Craiova.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale, vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Politehnica Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Politehnica Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Politehnica Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXVI, de 8000 (opt mii) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXV inclusiv, broşate, 8000 lei fiecare.

ANUL XXVI — No. 5. TIMISOARA, IULIE 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 1000 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 8000 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Politehnica Timișoara.

COORDONATE ANALAGMATICE

de
N. N. MIHĂILEANU

1. Fie, în spațiul cu n dimensiuni

$$u \equiv u_0(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2-1)- \tag{1}$$
$$2u_1x_1-2u_2x_2-2u_3x_3-\cdots$$
$$-2u_nx_n+iu_{n+1}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2+1)=0$$

ecuația unei sfere cu centrul în C de coordonate

$$(2)\ (C)\quad \frac{u_1}{u_0+iu_{n+1}},\frac{u_2}{u_0+iu_{n+1}},\ldots,\frac{u_n}{u_0+iu_{n+1}}$$

și de rază r, dată de

$$(3)\quad (u_0+iu_{n+1})^2r^2=u_0^2+u_1^2+u_2^2+\cdots+u_{n+1}^2.$$

Fie și

$$v\equiv v_0(x_1^2+\cdots+x_n^2-1)-2v_1x_1-\cdots$$
$$-2v_nx_n+iv_{n+1}(x_1^2+\cdots+x_n^2+1)=0$$

ecuația altei sfere de centru C′ și rază r' date de formule analoage cu (2) și (3). Dacă A este unul din punctele lor de intersecție, vom numi unghiu al sferelor, expresia θ dată de

$$d^2=r^2+r'^2-2rr'\cos\theta \qquad (d=\overline{CC'})$$

deci

$$(4)\quad (u_0+iu_{n+1})(v_0+iv_{n+1})rr'\cos\theta=$$
$$u_0v_0+u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n+u_{n+1}v_{n+1}$$

sau

$$(4')\quad \cos\theta=\frac{\sum_0^{n+1}u_iv_i}{\sqrt{\sum_0^{n+1}u_i^2}\cdot\sqrt{\sum_0^{n+1}v_i^2}}.$$

2. Sfera (1) reprezintă un plan, când

$$\bar{u}=u_0+iu_{n+1}=0$$

și un punct, când $r=0$, sau

$$(I)\quad u_0^2+u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2+u_{n+1}^2=0.$$

Putem cuprinde deci sub denumirea de sferă și planele și punctele.

Două sfere sunt ortogonale, dacă

$$(II)\quad u_0v_0+u_1v_1+\cdots+u_nv_n+u_{n+1}v_{n+1}=0;$$

(I) și (II) sunt forme fundamentale, a doua fiind polara primei. O sferă ortogonală ei însăși se reduce la un punct.

3. Numerele $u_0,u_1,\ldots,u_n,u_{n+1}$ din ecuația (1) le vom numi *coordonate analagmatice* ale sferei (1). Ele sunt în număr de $n+2$, dar fiind omogene, rămân $n+1$ coordonate independente. Să considerăm separat sferele

$$(6)\quad S_0=x_1^2+\cdots+x_n^2-1,\ S_1=x_1,\ S_2=x_2,\ldots,$$
$$S_n=x_n,\ S_{n+1}=x_1^2+\cdots+x_n^2+1$$

de coordonate analagmatice

$$(1,0,\ldots,0);\ (0,1,0,\ldots,0);\ (0,0,1,\ldots,0);\ldots.$$
$$(0,0,0,\ldots,1);$$

verificăm că ele formează un sistem de sfere ortogonale câte două.

Făcând o inversiune de pol arbitrar, recunoaștem că în situația a $n+2$ sfere două câte două ortogonale, dacă $n+1$ sunt reale a $n+2-a$ trebue să fie total — imaginară[1]. Sferele S_0 și S_{n+1} au razele 1 și $\pm i$ (fie $-i$); pentru celelalte, să observăm că un plan $x_1=0$ este limita sferei

$$S_1=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-2r_1x_1=0$$

pentru $x_1=\infty$; raportul

$$\frac{S_1}{r_1}=\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-2r_1x_1}{r_1}$$

[1]) Cuvântul imaginar ar fi rău întrebuințat, fiindcă ecuația $S_{n+1}=0$ n'are coeficienți imaginari; de fapt sfera $S_{n+1}=0$ nu are de loc puncte reale.

pentru $r_1 = \infty$ devine $-2x_1$; deci, dacă notăm prin r_i razele sferelor, ecuația (1) devine

$$(7)\quad u \equiv u_0 \frac{S_0}{K_0} + u_1 \frac{S_1}{r_1} + u_2 \frac{S_2}{r_2} + \cdots + u_n \frac{S_n}{r_n} + u_{n+1} \frac{S_{n+1}}{r_{n+1}} = 0.$$

4. Să presupunem sfera (1) redusă la un punct $M(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$; M trebue să fie centrul sferei, deci

$$(8)\quad \alpha_1 = \frac{u_1}{u_0 + i u_{n+1}},\ \alpha_2 = \frac{u_2}{u_0 + i u_{n+1}},\ \ldots,\ \alpha_n = \frac{u_n}{u_0 + i u_{n+1}};$$

(8) sunt formulele care fac trecerea dela coordonatele analagmatice u la coordonatele carteziene α.

Pe de altă parte, din (I)

$$u_0(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 + 1) + i u_{n+1}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 - 1) = 0$$

deci

$$u_0 + i u_{n+1} = \frac{-2u_0}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 - 1}$$

de unde

$$(9)\quad \frac{u_0}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 - 1} = \frac{u_1}{-2\alpha_1} = \frac{u_2}{-2\alpha_2} = \cdots = \frac{u_n}{-2\alpha_n} = \frac{u_{n+1}}{i(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 + 1)}$$

formule care permit să exprimăm coordonatele analagmatice ale unui punct în funcție de coordonatele lui carteziene. Deci coordonatele analagmatice sunt proporționale cu puterile punctului M divizate prin raze, la sferele sistemului (6):

$$u_i = k \frac{S_i}{r_i}.$$

Vom lua sferele (6) ca sistem de referință; acest sistem este format din planele coordonate de origine O, sfera unitate centrată în origine și sfera total — imaginară.

5. Ecuația unei sfere se poate astfel scrie sub forma lineară

$$(10)\quad \sum_{i=0}^{n+1} u_i v_i = 0$$

unde u_i sunt coordonatele analagmatice ale sferei iar v_i ale unui punct curent al sferei. Ecuația sferei determinate de punctele

$$v_i^1, v_i^2, \ldots, v_i^{n+2} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

este deci

$$(11)\quad \left| v_i v_i^1 v_i^2 \ldots v_i^{n+1} \right| = 0.$$

Să căutăm condiția ca $n+1$ sfere să aibă un punct comun, fie sferele

$$u_0^k v_0 + u_1^k v_1 + u_2^k v_2 + \cdots + u_{n+1}^k v_{n+1} = 0$$

$(k = 1, 2, \ldots, n+1)$; să numim $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ δ_{n+1} determinanții de ordinul n deduși din matricea coeficienților u, suprimând succesiv coloana primă, a 2-a etc. Rezolvând sistemul precedent avem

$$\frac{v_0}{\delta_0} = \frac{v_1}{\delta_1} = \cdots = \frac{v_n}{\delta_n} = \frac{v_{n+1}}{\delta_{n+1}}$$

dar coordonatele v satisfac condiția (1), deci cele $n+1$ sfere au un punct comun, dacă

$$(12)\quad \delta_0^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_n^2 + \delta_{n+1}^2 = 0.$$

6. Să cercetăm în particular cazul $n = 1$. Ecuația

$$u = u_0(x_1^2 - 1) - 2u_1 x_1 + i u_2(x_1^2 + 1) = 0$$

sau

$$(u_0 + i u_2) x_1^2 - 2u_1 x_1 - (u_0 - i u_2) = 0$$

reprezintă o pereche de puncte pe dreapta varietății. Când

$$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 = 0$$

avem un punct dublu. Perechile fundamentale sunt $(1, -1)$; $(0, \infty)$; $(i, -i)$. Mijlocul distanței punctelor perechii este

$$u_1 : (u_0 + i u_2);$$

distanța lor este $2r$ unde r este dat de

$$(u_0 + i u_2)^2 r^2 = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2.$$

Fie și perechea de puncte (v). Se știe că raportul anarmonic ϱ al perechilor de rădăcini ale ecuațiilor

$$a x^2 + b x + c = 0, \quad \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

este dat de

$$\frac{1+\varrho}{1-\varrho} = \frac{2(c\alpha + a\gamma) - b\beta}{\sqrt{b^2 - 4ac}\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}.$$

Raportul anarmonic al punctelor perechilor (u), (v) este deci

$$\frac{1+\varrho}{1-\varrho}=\frac{u_0v_0+u_1v_1+u_2v_2}{\sqrt{u_0^2+u_1^2+u_2^2}\,\sqrt{v_0^2+v_1^2+v_2^2}}=\cos\theta$$

sau

$$\varrho=-\operatorname{cotg}^2\frac{\theta}{2}$$

θ este unghiul sub care se taie două cercuri descrise pe segmentele fiecărei perechi ca diametre[1].

Condiția ca perechile de puncte (u), (v) să aibă un punct comun, este

$$\delta_0^2+\delta_1^2+\delta_2^2=0$$

unde δ_0, δ_1, δ_2 sunt determinanții matricei

$$\left\|\begin{matrix}u_0 & u_1 & u_2\\ v_0 & v_1 & v_2\end{matrix}\right\|.$$

Fie s_0, s_1, s_2 perechile de puncte fundamentale. Ecuația unei perechi de puncte se scrie

$$u_0s_0+u_1s_1+u_2s_2=0.$$

Fie (v) altă pereche. Ecuația

$$(u_0+\lambda v_0)s_0+(u_1+\lambda v_1)s_1+(u_2+\lambda v_2)s_2=0$$

reprezintă un fascicol linear de perechi de puncte. Din fascicol fac parte și două puncte duble date de valorile lui λ pentru care

$$(u_0+\lambda v_0)^2+(u_1+\lambda v_1)^2+(u_2+\lambda v_2)^2=0.$$

Dacă perechile de puncte date sunt puncte duble, nu mai avem alte puncte duble în fascicol, afară de cazul când aceste puncte duble sunt ele însile confundate, când orice alt punct dublu al dreptei face parte din fascicol.

O pereche de puncte în plan poate fi privită ca intersecție a două cercuri

$$(u)\equiv u_0(x_1^2+x_2^2-1)-2u_1x_1-2u_2x_2+iu_3(x_1^2+x_2^2+1)=0$$
$$(v)\equiv v_0(x_1^2+x_2^2-1)-2v_1x_1-2v_2x_2+iv_3(x_1^2+x_2^2+1)=0$$

deci determinată de minorii din tabloul

$$\left\|\begin{matrix}u_0 & u_1 & u_2 & u_3\\ v_0 & v_1 & v_2 & v_3\end{matrix}\right\|$$

anume $p_{ij}=u_iv_j-u_jv_i$. Reprezentăm astfel o pereche de puncte prin 6 coordonate p_{ij}; ele sunt omogene și legate prin relația

$$p_{01}p_{23}+p_{02}p_{31}+p_{03}p_{12}=0,$$

obținută scriind determinantul nul de ordinul patru format din liniile matricei, scrise de două ori și desvoltând după regula *Laplace*. Rămân astfel patru coordonate independente analagmatice pentru a determina o pereche de puncte în plan.

7. Studiul coordonatelor analagmatice începe obișnuit cu cercul în plan. Am arătat în paragraful 6 că îl putem începe cu perechea de puncte. Primele paragrafe, deși exprimă un material cunoscut au fost redate pentru a se putea urmări adaptarea $n=1$ dar mai ales fiindcă redactarea lor este, probabil, nouă.

NOTE MATEMATICE

12. — *Tétraèdres homothétiques.*

1. Soient A′, B′, C′, D′ les points qui divisent dans les rapports

$$\overline{PA'}:\overline{PA}=\alpha,\ \overline{PB'}:\overline{PB}=\beta,\ \overline{PC'}:\overline{PC}=\gamma,$$
$$\overline{PD'}:\overline{PD}=\delta,$$

les segments rectilignes joignant un point arbitraire P à distance finie aux sommets A, B, C, D d'un tétraèdre $T\equiv ABCD$. Les plans parallèles aux plans des faces BCD, CDA, DAB, ABC menés par A′, B′, C′, D′ forment un tétraèdre T_1 homothétique à T. Si h_a, h_b, h_c, h_d sont les hauteurs du tétraèdre T et d_a, d_a, d_c, d_d les distances algébriques des points A′, B′, C′, D′, aux plans BCD, CDA, DAB, ABC, l'expression connue

$$k=1-\left(\frac{d_a}{h_a}+\frac{d_b}{h_b}+\frac{d_c}{h_c}+\frac{d_d}{h_d}\right)$$

du rapport d'homothétie des tétraèdres T_1 et T peut s'écrire

$$k=1-\left(\frac{\overline{A'BCD}+\overline{B'CDA}+\overline{C'DAB}+\overline{D'ABC}}{\overline{ABCD}}\right)$$

ou enfin, après quelques simplifications,

$$(1)\qquad k=-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)+\frac{\alpha.\overline{PBCD}+\beta.\overline{PCDA}+\gamma.\overline{PDAB}+\delta.\overline{PABC}}{\overline{ABCD}}.$$

[2]) Teorema *Casey*: Două cercuri se taie sub unghiul θ și diametrul comun taie cercurile în A, B, C, D astfel ca

$$(ABCD)=-\operatorname{cotg}^2\frac{\theta}{2}.$$

2. Si le point P se confond avec le centre de gravité G de T,

$$k = -\frac{3}{4}(\alpha+\beta+\gamma+\delta).$$

Lorsque $\alpha=\beta=\gamma=\delta$, $k=-3\alpha$, et l'on retrouve une expression donné par *J. Neuberg*, (*Mathesis*, 1923, — 175).

V. THÉBAULT

---

13. — *Asupra unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi.*

1. E foarte cunoscută integrarea ecuaţiilor diferenţiale de forma[1]

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right).$$

D-l prof *P.Sergescu* dă o generalizare[2] a acestei ecuaţii diferenţiale. D-sa consideră ecuaţia

$$\frac{dy}{px}=f\left(\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\right)$$

unde $P(x,y)$ şi $Q(x,y)$ sunt polinoame de gradul n în x şi y, şi printr'o transformare lineară o aduce la o ecuaţie omogenă, pe care apoi o integrează.

2. In cele ce urmează, noi vom trata cazul particular al ecuaţiilor diferenţiale de forma

$$\frac{dy}{dx}=F\left[\frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}\right], \tag{1}$$

unde

$$f_i(x,y)=A_ix^2+2B_ixy+C_iy^2+2D_ix+2E_iy+F_i\ (i=1,2) \tag{2}$$

reprezintă două conice, raportate la un sistem de axe $x0y$.

Ecuaţiile (2) se mai pot scrie:[3]

$$f_i(x,y)=x\frac{\partial f_i}{\partial x}+y\frac{\partial f_i}{\partial y}+D_ix+E_iy+F_i\quad(i=1,2). \tag{2'}$$

Presupunând conicele (2') cu centrul la distanţă finită şi raportându-le la un nou sistem de axe XOY trecând prin centrul lor, vom avea

$$\frac{\partial f_i}{\partial x}=0\ ,\quad \frac{\partial f_i}{\partial y}=0,\qquad (i=1,2) \tag{3}$$

Impunând conicelor condiţia ca acestea să se reducă la câte două drepte — acestea trecând prin centrul conicelor — coordonatele centrului vor verifica şi ecuaţiile

$$D_ix+E_iy+F_i=0,\qquad (i=1,2).$$

Am obţinut astfel două sisteme de câte trei ecuaţii cu două necunoscute

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0\\ B_1x+C_1y+E_1=0\\ D_1x+E_1y+F_1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2x+B_2y+C_2=0\\ B_2x+C_2y+E_2=0\\ D_2x+E_2y+F_2=0. \end{cases}$$

Din condiţia de compatibilitate a sistemelor, obţinem:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1\\ B_1 & C_1 & E_1\\ D_1 & E_1 & F_1 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} A_2 & B_2 & D_2\\ B_2 & C_2 & E_2\\ D_2 & E_2 & F_2 \end{vmatrix}=0. \tag{4}$$

Cu condiţiile (4), ecuaţiile conicelor se pot scrie

$$f_i(X,Y)=A_iX^2+2B_iXY+C_iY^2,\quad (i=1,2).$$

In acest caz, ecuaţia diferenţială propusă se va putea scrie

$$\frac{dY}{dX}=F\left[\frac{f_1(X,Y)}{f_2(X,Y)}\right] \tag{5}$$

şi se vede că s'a redus la o ecuaţie omogenă în X şi Y. Făcând notaţia

$$Y=tX$$

adică

$$\frac{dY}{dX}=X\frac{dt}{dx}+t$$

(5) devine

$$X\frac{dt}{dX}=\varphi(t)$$

unde $\varphi(t)$ e o funcţie de noua variabilă t.

Separând variabilele, avem

$$\varphi(t)\,dt=\frac{dX}{X}$$

---

[1]) *V. Alaci*: Analiză matematică partea III-a pag, 18, (Curs litografiat de *V. Mioc*).

[2]) *P. Sergescu:* „Asupra unei generalizări a ecuaţiilor diferenţiale omogene de ordinul întâi". R.M.T. An. 23,Nr. 3, pag. 28.

[3]) *N. Abramescu:* „Lecţiuni de geometrie analitică" ed. II, pag. 122.

sau integrând:

$$\int \varphi(t)\,dt = \log \frac{X}{C}$$

deci

$$X = C\,e^{\int \varphi(t)\,dt}$$

din cele văzute, deducem:

Pentruca o ecuaţie diferenţială (1) să se poată integra, este necesar şi suficient ca funcţiunile $f_i(x,y)$, $i=1.2$, să reprezinte două conice de acelaş centru, degenerate în drepte.

Aplicaţie: Să se integreze ecuaţia

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+2xy+2y^2-2x+2}{2x^2+4xy+y^2-4x-6y+1}.$$

Condiţiile (4) fiind îndeplinite, cele două conice se reduc la nişte drepte trecând prin centru; ecuaţiile centrului fiind

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x} = x+y-1=0;\quad \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial y} = x+2y=0$$

coordonatele sale sunt $x=2$, $y=-1$. Transportând axele în punctul $(2,-1)$, adică făcând transformarea

$$x = X+2,\quad y = Y-1$$

ecuaţia diferenţială devine

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X^2+2XY+2Y^2}{2X^2+4XY+Y^2}.$$

Punând $Y=tX$, adică $\frac{dY}{dX} = X\frac{dt}{dX}+t$, ecuaţia se scrie

$$X\frac{dt}{dX} = -\frac{t^2+4t+2}{t^3+2t^2-1}$$

sau

$$\frac{t^2+4t+2}{t^3+2t^2-1}\,dt = -\frac{dX}{X}$$

şi integrând:

$$\frac{5}{\sqrt{5}}\log\frac{t+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{t+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}} = \log\frac{C}{X}$$

*** $$\frac{2(y+1)+(1-\sqrt{5})(x-2)}{2(y+1)+(1+\sqrt{5})(x-2)} = \frac{C_1}{(x-2)^{\frac{\sqrt{5}}{3}}}.$$

FLORIAN GOGA

---

14. — *Asupra problemei No. 426 (pag. 214) din „Exerciţii şi Probleme" de T. Angheluţă*

Enunţul acestei probleme este:

„Un punct material greu este aruncat din punctul O cu viteza V_0. Să se determine unghiul α al acestei viteze cu orizontala, astfel ca distanţa dela punctul O la punctul de întâlnire a mobilului cu planul orizontal la distanţa h, dedesubtul punctului O să fie maximă".

In soluţia dată se găseşte că maximum distanţei este $\left(h+\frac{V_0^2}{g}\right)$, iar unghiul este dat de relaţia $\left(\cos 2\alpha = \frac{gh}{g.h+V_0^2}\right)$.

Reluând această problemă am găsit o soluţie care diferă puţin.

In adevăr, ecuaţia traectoriei în vid, pentru ramura care este deasupra axei Ox (în regiunea pozitivă) este:

$$(1)\qquad z = x.t\,y\,\alpha - \frac{g.x^2}{2V_0^2\cos^2\alpha}$$

unde α este unghiul de tragere.

Ecuaţia traectoriei sub axa Ox (în regiunea negativă) este:

$$(2)\qquad z' = -x'.t\,y\,\alpha - \frac{g.x'^2}{2V_0^2\cos^2\alpha}.$$

Fie A punctul unde traectoria (ramura coborâtoare a parabolei) tae axa Ox coborând. Atunci avem:

$$(3)\qquad \overline{OA} = \frac{V_0^2\sin 2\alpha}{g}.$$

Fie B punctul de sub axa Ox unde $z'=-h$.

Atunci avem:

$$(4)\qquad \overline{OB}^2 = (\overline{OA}+x')^2+h^2$$

unde x' este abscisa punctului B, origina fiind socotită în A. Se vede dar lesne că maximum lui $\overline{OB}$ depinde numai de $(\overline{OA}+x')$.

Făcând în (2) pe $z'=-h$ şi rezolvând pe x' obţinem:

$$(5)\qquad x' = \frac{V_0^2\sin 2\alpha}{2g}\left[-1\pm\sqrt{1+\frac{2gh}{V_0^2\sin^2\alpha}}\right].$$

Luând numai rădăcina cu semnul (+), avem:

$$(6)\quad \overline{OA}+x'=\frac{V_0^2\sin 2\alpha}{2g}\cdot\sqrt{1+\frac{2gh}{V_0^2\sin^2\alpha}}.$$

Pentru a găsi valoarea maximă, anulăm derivata în raport de α, deci avem:

$$(7)\quad \left(1+\frac{2gh}{V_0^2\sin^2\alpha}\right)\cos 2\alpha=\frac{2g\cdot h}{V_0^2}\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

De aci obținem:

$$(8)\quad \cos 2\alpha=\frac{2gh}{V_0^2}.$$

Inlocuind valoarea lui α scoasă din această relație în relația (6) obținem:

$$(9)\quad (\overline{OA}+x')_{max}=\frac{V_0^2+2gh}{2g}.$$

Cu aceasta, maximul lui OB va fi:

$$(10)\quad (\overline{OB})_{max.}=\sqrt{h^2+\left(h+\frac{V_0^2}{2g}\right)^2}.$$

COMANDOR I. LINTES

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul LI, Nr. 10, Iunie 1946. † Profesorul *Gheorghe A. Nichifor*, de *Adrian Gheorghiu*. Stabilirea formulei generale a coeficienților binomiali prin metoda inducției complecte, de Prof. *E. Vișa*. Asupra generalizării formulei lui *Binet*, de *Al. Stoenescu*. Noui considerații asnpra sistemelor cu inerție generalizată, de Prof. *T. Vescan*. Raport asupra decernării premiului de trigonometrie *„V. Cristescu*, de *Șerban Gheorghiu*. G-l *Gh. Liteanu*, *Al. Niculescu*. Note matematice, probleme rezolvate și propuse.

2. *Exerciții de Matematici generale* de: *Bal. L.*, *Ghircoiașiu N.*, *Stamate I.* și *Viciu A.*. Asistenți universitari. Este o broșură litografiată de 48 pagini, ce cuprinde 87 de probleme cu soluțiile lor, care s-au tratat la Seminarul de Matematicî a Universității din Cluj. O recomandăm călduros studenților Universității și a Politehnicei, fiindule de un real folos.

3. *D. I. Mangeron*. Mécanique non-lineaire sur les systèmes oscillatoirres non lineaires. (Extras din Buletinul Politehnicei *„Gh. Asachi“*, Vol. I, 1946.

4. *Dumitru Ion Mangeron*. *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646—1716), (cu ocazia tricentenarului nașterii lui), Extras din Revista Științifică *„V. Adamachi“*. Vol. XXXII, 1946.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1161. — *Să se găsească patratele perfecte de șase cifre de forma a b c d c d.*

V. THEBAULT

Soluție. Fie

$$N^2=a\,b\,c\,d\,c\,d$$

patratul căutat. Grupa $c\,d$ este una din următoarele grupe de două cifre cu care se termină un patrat perfect:

00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96.

Ținând seamă de tabloul terminațiunilor de 3 cifre ale patratelor perfecte dat de D-l G-l *Gh. Buicliu* în *Gazeta Matematică* Vol. XXXIII pag. 138, urmează că grupa $cd\,cd$ va fi una din următoarele 13 grupe, din care am eliminat pe 0000:

0404: 1616; 2121; 2424; 2929; 3636; 5656; 6161; 6464; 6969; 7676; 8484; 9696

grupa 0000 dă soluții

$$N^2=a\,b\times 10000$$

în care $a\,b$ este unul din patratele:

01, 04, 09, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Acum luăm pe rând pe fiecare din cele 13 grupe precedente și-i adăugăm pe rând înainte pe fiecare număr de 2 cifre de la 10 la 99, eliminând numerele $a\,b$ de forma $0\,b$, care ar da soluții de formă.

Din numerele astfel formate eliminăm pe acelea, care prin descompuneri în factori, nu sunt patrate perfecte. Rămân ca soluții ale problemei următoarele 8 patrate:

$369^2=136161$; $408^2=166464$; $478^2=228484$;

$563^2=316969$; $577^2=332929$; $673^2=452929$;

$694^2=483636$; $881^2=776161$.

Notă. Au găsit soluții parțiale prin încercări D-nii: *Băleanu D-tru* (București); *Chiriac Const.* (Lic. Militar Iași); *Denis Const.* (Lic. „Roman Vodă“ Roman; *Godeanu Vesile* (Lic. Militar Craiova); *Lupescu Gh. Corneliu* (Bacalaureat Roman); *Mihalcea V. V.* (Lic. Beiuș); *Milea G. E.* (S-lt); *Popa Nic.* (Lic. Beiuș); *Predoescu Traian* (Lic. Militar Craiova); *Sâmbotin Gh.* (S-lt); și Ing. *Vasiliu Leoben Gh.*

Patratele de forma $a\,a\,b\,c\,b\,c$ și $a\,a\,b\,c\,c\,b$ formează obiectul problemei 4242, propusă tot de d-l *V. Thébault* și rezolvată în *Gazeta Mathematică* Vol. XXXIX pag. 282.

Gl. B.

Problema 2182. — *Se dă patrulaterul* ABCD, *având unghiurile* B *și* D *drepte. Să se arate că:*

1°, *Diferența patratelor diagonalelor este egală cu de 4 ori patratul segmentului ce unește mijloacele acestor diagonale.*

2°. *Suma patratelor sumelor laturilor opuse este egală cu patratul sumei diagonalelor plus de 4 ori patratul segmentului ce unește mijloacele acestor diagonale.*

MIHAIL BOTEZ

Soluție. 1°. Unghiurile B și D fiind drepte, patrulaterul A B C D este inscriptibil într'un cerc Centrul acestui cerc este evident mijlocul O al diagonalei A C. Unind O cu mijlocul E al diagonalei B D, rezultă că O E este perpendiculară pe coarda B D și deci în triunghiul dreptunghic OEB, teorema lui *Pitagora* ne dă

$$\overline{OB}^2 - \overline{BE}^2 = \overline{OE}^2.$$

Dar

$$OB = OA = \frac{AC}{2}, \text{ ca raze,}$$

iar

$$BE = \frac{BD}{2},$$

astfel că relația (1) devine

$$\left(\frac{AC}{2}\right)^2 - \left(\frac{BD}{2}\right)^2 = \overline{OE}^2.$$

sau

$$\overline{AC}^2 - \overline{BD}^2 = 4\,\overline{OE}^2.$$

Prima parte a problemei este stabilită.

2°. Trebuie să demonstrăm încă, că

$$(AB+CD)^2 + (BC+DA)^2 = (AC+BD)^2 + 4 \cdot \overline{OE}^2.$$

Dezvoltând primul membru, notat cu M, putem scri

$$M = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{DA}^2 + 2.AB.CD + 2BC.DA.$$

Cum într'un patrulater inscriptibil A B C D avem cunoscute relațiile

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4.\overline{OE}^2,$$
$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD,$$

expresia lui M se poate scri succesiv

$$M = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4.\overline{OE}^2 + 2.AC.BD = (AC+BD)^2 + 4.OE^2.$$

Relația (2) este astfel stabilită.

Soluții bune date de d-rele *Măran Ana* (P. T.), *Tarța Valeria* (P., T.), și de d-nii: *Anton Ioan* (P. T.), *Bolcaș Victor* (Beiuș), *Constantinescu Ilie* (P. T.), *David Vasile*, *Dobrotescu Gh.* (P., T.), *Enache Ioan* (S-Lt.), *Godea I.* (P., T.), *Hendh Martin*, *Iosifescu Cicerone* (P., Buc.), *Mațai Mircea* (Lic. Beiuș), *Muțiu Antim* (P., T.), *Pălăceanu Vasile* (Lic. Mil Tim.), *Pat Moise* (P, T.), *Sabău Mihai* (P., T.), *Stretea Alexandru* (P., T.), *Tutor Aurel* (Lic. Făgăraș) și *Wegener Eugen* (București).

Problema 2339. — *Dacă punctele* A, B, C, D *sunt așezate pe rând pe o dreaptă, atunci avem*

$$\overline{AD}(\overline{AB}+\overline{AC}) = \overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AC}.\overline{BD} + 2.\overline{AB}.\overline{AC}$$
$$\overline{AD}(\overline{AC}+\overline{BD}) = \overline{BD}.\overline{CD} + \overline{AB}.\overline{AC} + 2.\overline{BD}.\overline{AC}.$$

V. ALACI

Soluție. Fixând pe o dreaptă, pe rând, punctele A, B, C, D și notând cu x, y, z segmentele $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, anume

$$x = \overline{AB},\ y = \overline{AC},\ z = \overline{AD},$$

relațiile din enunț se mai pot scri evident

$$(1)\quad \begin{aligned} z(x+y) &= x(z-y) + y(z-x) + 2xy, \\ z(y+z-x) &= (z-x)(z-y) + xy + 2(z-x)y. \end{aligned}$$

Vom stabili deci aceste relații:

Insemnând cu E membrul al 2-lea al primei relații din (1) și dezvoltând calculele, putem scri succesiv

$$E = xz - xy + yz - xy + 2xy = z(x+y).$$

Astfel prima relație din (1) este stabilită.

De asemeni, notând cu E_1 membrul al 2-lea din a 2-a relație din (1), putem scri

$$E_1 = z^2 - xz - yz + xy + xy + 2yz - 2xy = z^2 - xz + yz = z(y+z-x),$$

astfel că și a 2-a relație din (1) este stabilită.

Soluții date de d-rele *Costin Alexandrina* (P., T.), *Dica Rodica* (Lic. Brăila) și de d-nii: *Arnăutu Marin* (P., T.), *Beșchea Radu* (Liceul Brăila), *Birănaș Ioan* (P., T.), *Brasch Andrei* (P., T.), *Bogza Mihai* (Liceul Roman), *Chesaru Cristea* (P., T.), *Coman Liviu* (P., T.), *Constantinescu Ilie* (P., T), *Coțiu Aurel* (Lic. Beiuș), *Dobrișan Alexandru* (P., T.), *Filimon Ioan* (Deva), *Fränkel David* (P., T.), *Frunză Radu* (P., T.), *Giurconiu Mihai* (P., T.), *Goldiș Gheorghe* (P., T.), *Gottard Francisc* (P., T.), *Grigore Gheorghe* (P., T.), *Grigore Ioan* (student), *Guttman Tiberiu* (Lic. Deva), *Haret Radu* (București), *Macavei Eugen* (Tg.-Mureș), *Mazilu Marius* (Făgăraș), *Meteș Mircea* (P., T.), *Mitric Aurel* (P., T.), *Nedelcu Ulpius* (P., T.), *Novac Ioan* (Lic. Brăila), *Palade Dionisie* (P., T.), *Pali Sergiu* (P., T.), *Podracky Valer* (Lic. Loga), *Popa Vasile*, *Popescu Barbu* (Lic. Mil. Timișoara), *Popescu D-tru* (P., T.), *Popovici Eugen Dan* (P., T.), *Rohrlich Alfred* (P., T.), *Safta Nicolae* (Caracal), *Sasu Ioan* (P., T.), *Șchiopu Ioan* (P., T.), *Serengău Mihai* (P., T.), *Stanciu Petre* (P., T.), *Stern Tiberiu* (P., T.), *Stoian Anatol* (P., T.), *Stroescu Florea* (Lic Caracal), *Teiușanu Horia* (Lic. Beiuș), *Teodorescu Petre* (Liceul „Matei Basarab" București), *Tincu C-tin* P., T.), *Titero Ioan* (P., P.), și *Vlăduț C-tin* (P., T.).

Problema 2342. — *Să se arate că*

$$\begin{vmatrix} a^2-bc & c^2-ab & b^2-ac \\ b^2-ac & a^2-bc & c^2-ab \\ c^2-ab & b^2-ac & a^2-bc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2 & ab+bc+ca & ab+bc+ca \\ ab+bc+ca & a^2+b^2+c^2 & ab+bc+ca \\ ab+bc+ca & ab+bc+ca & a^2+b^2+c^2 \end{vmatrix}.$$

MARIA NEUMANN

Soluție. Notând determinantul din primul membru cu D și adunând la elementele primei linii elementele celorlalte linii, obținem

$$(1) \qquad D=(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b^2-ac & a^2-bc & c^2-ab \\ c^2-ab & b^2-ac & a^2-bc \end{vmatrix} =$$

$$(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b^2-ac & a^2-b^2+c(a-b) & c^2-b^2+a(c-b) \\ c^2-ab & b^2-c^2+a(b-c) & a^2-c^2+b(a-c) \end{vmatrix} =$$

$$(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\begin{vmatrix} (a-b)(a+b+c) & (c-b)(c+b+a) \\ (b-c)(a+c+a) & (a-c)(a+c+b) \end{vmatrix}$$

$$=(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)(a+b+c)^2\begin{vmatrix} a-b & c-b \\ b-c & a-c \end{vmatrix}$$

Dar

$$\begin{vmatrix} a-b & c-b \\ b-c & a-c \end{vmatrix} = a^2-ab-ac+bc-bc+c^2+b^2-bc=$$

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix},$$

astfel că (1) devine

$$D=(a+b+c)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}^2$$

Efectuând patratul ultimului determinant, avem

$$D=\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2 & ab+bc+ca & ab+bc+ca \\ ab+bc+ca & a^2+b^2+c^2 & ab+bc+ca \\ ab+bc+ca & ab+bc+ca & a^2+b^2+c^2 \end{vmatrix},$$

astfel că relația dată este stabilită.

Soluții având calcule mai dezvoltate, date de d-ra *Costin Alexandrina* și de d-nii: *Arnăutu Marin* (Polit., Timișoara), *Bărbulescu Vasile* (Pitești), *Beșchea Radu* (Lic. Brăila), *Birănaș Ioan* (Polit, Timișoara), *Brașoveanu Gh.* (Craiova), *Chesaru Cristea* (Polit, Timișoara), *Cârnațiu Ioan* (Polit., Timișoara), *Coman Liviu*, *Constantinescu Ilie* (Polit., Timișoara), *Coțiu Aurel*, *Filimon Ioan*, *Gutman Tiberiu*, *Haret Radu*, *Man Octavian*, *Mitric Aurel*, *Nedelcu Ulpius* (Polit., Timișoara), *Novac Ioan*, *Palade Dionisie*, *Popa Vasile*, *Popescu D-tru*, *Rohrlic Alfred* (Polit., Timișoara), *Serengău Mihai* (Polit., Timișoara), *Sergiu Pali* (Polit., Timișoara), *Stern Tiberiu* (Polit., Timișoara), *Stroescu Florea* (Caracal), *Teiușanu Florea*, *Teodorescu Petre* (București), *Tincu C-tin* (Polit., Timișoara), *Titero Ioan* și *Vlăduț C-tin* (Polit., Timișoara).

Problema 2350. — *Fie* A A′, B B′ *doi diametri perpendiculari într'un cerc* O. B′ A *taie în* M *tangenta dusă în* B. *A doua tangentă din* M *la cerc face cu* A B *un unghiu* x *dat de relaţia*

$$7 \operatorname{tg} x = 1.$$

N. N. MIHAILEANU

Soluţie. Construim figura impusă de enunţ şi notăm

$$\sphericalangle B B' M = \alpha, \quad \sphericalangle B' M T = x$$

şi a raza cercului O. Fiindcă triunghiul O A B′ este isoscel şi dreptunghic, rezultă că

$$\sphericalangle O B' A = 45^0$$

şi atunci din triunghiu dreptunghic B M B′ urmează că

$$\sphericalangle B M B' = 45^0 \text{ şi } B M = B B' = 2a,$$

iar din triunghiul dreptunghic B O M rezultă

$$(1) \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$

Din triunghiurile dreptunghice egale B O M, T O M deducem

$$\sphericalangle T O M = \sphericalangle B O M = \alpha.$$

Din figură mai rezultă

$$\sphericalangle B M T = 2\alpha = \sphericalangle B M B' + \sphericalangle B M T = 45^0 + x.$$

Luând tangenta în ambii membri putem scri

$$\operatorname{tg}(45^0 + x) = \operatorname{tg} 2\alpha,$$

sau

$$(2) \qquad \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3},$$

fiindcă am ţinut seamă de (1).

Aplicând în (2) o proprietate a rapoartelor egale, deducem

$$\operatorname{tg} x = \frac{4-3}{4+3} = \frac{1}{7}, \qquad \text{deci } 7 \operatorname{tg} x = 1,$$

ceeace trebuia stabilit.

Soluţii date de d-nii: *Birănaş Ioan* (P., T.), *Bogza Mihai* (Lic. Roman), *Constantinescu Ilie* (P., T.), *Dobrişan Alexandru* (P., T.), *Gligor Ion* (student), *Goldiş Gh.* (P., T.), *Gottard Francisc* (P., T.), *Ilea Vasile* (P., T.), *Popescu D-tru* (P., T.), *Serengău Mihai* (P., T.), *Teodorescu Petre* (Lic. „Matei Basarab", Bucureşti), şi *Tincu C-tin* (P., T.),

Soluţie analitică. Luăm diametri perpendiculari A A′, B B′ ca axe şi fie a raza cercului. Ecuaţia acestui cerc este

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = a^2.$$

Efectuând celelalte construcţii din enunţ, observăm că ecuaţiile dreptelor A B′ şi B M sunt respectiv

$$(2) \qquad y = x - a, \quad y = a.$$

al căror punct de intersecţie este M $(2a, a)$.

A 2-a tangentă din M_1 fie M T şi atunci polara lui M faţă de cercul O are ecuaţia

$$2ax + ay = a^2,$$

sau

$$(3) \qquad 2x + y = a.$$

Intersecţia acestei polare cu cercul, ne dă coordonatele punctelor B şi T şi ele se obţin înlocuind in (1), pe y prin $y = a - 2x$ scos din (3), obţinem astfel

$$x^2 + (a - 2x)^2 = a^2$$

sau

$$5x^2 - 4ax = 0,$$

de unde

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{4a}{4},$$

pentru care corespunde

$$y_1 = a, \quad y_2 = -\frac{3a}{5}.$$

Astfel coordonatele punctului T, sunt

$$T\left(\frac{4a}{5}, -\frac{3a}{5}\right).$$

Tangenta la cerc în T este prin urmare

$$\frac{4a}{5}x - \frac{3a}{5}y = a^2,$$

sau

$$(4) \qquad 4x - 3y = a$$

Acum, unghiul x al dreptelor A B′ şi T M este dat de relaţia

$$(5) \qquad \operatorname{tg} x = \frac{m - m'}{1 + m \cdot m'},$$

unde m şi m′ sunt respectiv

$$(6) \qquad m = 1, \quad m' = \frac{3}{4},$$

cum reiasă imediat din ecuaţiile (2) şi (4) ale dreptelor A B′ şi T M.

Relaţia (5) în virtutea valorilor din (6) devine

$$\operatorname{tg} x = \frac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}} = \frac{1}{7},$$

deci

$$7 \operatorname{tg} x = 1,$$

relaţia cerută.

Soluţii date de d-nii: *Beşchea Radu* (Lic. Brăila), *Brasch Andrei* (P., T.), *Chesaru Cristea* (P., T.), *Macavei Eugen* (Tg.-Mureş), *Mitric Aurel* (P., T.) *Novac Ioan* (Liceul Brăila), *Palade Dionisie* (P., T.), *Podracky Valer* (L.Loga), *Popa Vasile* (Lic. Beiuş), *Popovici Eugen Dan* (P., T.), *Safta Nicolae*, *Sasu Ion* (P., T.), *Şchiopu Ioan* (P., T.), şi *Stoian Anatol*.

Problema 2359. — *Intr'un triunghiu oarecare* A B C, *în care notaţiile sunt cele obişnuite, avem relaţiile*

$$b \cos C - 2c \cos^2 \frac{B}{2} = \frac{b^2 - 4c^2 \cos^2 \frac{B}{2}}{a+c},$$

$$(b + 2c \cos C) \cos \frac{B}{2} = (a+c) \cos\left(\frac{B}{2} - C\right).$$

V. ALACI

Prima soluţie. Vom stabili pe rând relaţiile date.

1°. Insemnând cu E membrul al 2-lea al primei relaţii şi ţinând seamă de formulele cunoscute

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B, \quad 2 \cos^2 \frac{B}{2} = 1 + \cos B,$$

avem succesiv

$$\frac{a^2 + c^2 - 2ac \cos B - 2c^2 (1 + \cos B)}{a+c} =$$

$$\frac{a^2 - c^2 - 2c(a+c) \cos B}{a+c} = a - c - 2c \cos B.$$

Cum, $a = b \cos C + c \cos B$, mai putem scri

$$E = b \cos C + c \cos B - c - 2c \cos B =$$

$$b \cos C - c(1 + \cos B) = b \cos C - 2c \cos^2 \frac{B}{2}.$$

Astfel prima relaţie este stabilită.

2°. Notând cu E_1 primul membru al relaţiei a 2-a şi ţinând seamă de formula cunoscută

$$b = a \cos C + c \cos A,$$

avem succesiv efectuând unele transformări,

$$E_1 = b \cos \frac{B}{2} + 2c \cos C \cos \frac{B}{2} =$$

$$= a \cos C \cos \frac{B}{2} + c \cos A \cos \frac{B}{2} + 2c \cos C \cos \frac{B}{2}$$

$$= (a+c) \cos C \cos \frac{B}{2} + c \cos \frac{B}{2} (\cos A + \cos C)$$

$$= (a+c) \cos C \cos \frac{B}{2} + 2c \cos \frac{B}{2} \cos \frac{A+C}{2} \cos \frac{A+C}{2},$$

dar

$$\cos \frac{B}{2} = \sin \frac{A+C}{2}, \quad 2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} =$$

$$\sin A + \sin C, \quad \cos \frac{A+C}{2} = \sin \frac{B}{2}$$

astfel că

$$(1)\ E_1 = (a+c) \cos C \cos \frac{B}{2} + c \sin \frac{B}{2} (\sin A + \sin C).$$

Pe de altă parte din teorema sinusurilor avem

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A + \sin C}{a+c},$$

deci

$$\sin A + \sin C = \frac{(a+c) \sin C}{c},$$

relaţie care înlocuită în (1), ne dă

$$E_1 = (a+c) \cos C \cos \frac{B}{2} + (a+c) \sin C \sin \frac{B}{2}$$

$$= (a+c) \left(\cos C \cos \frac{B}{2} + \sin C \sin \frac{B}{2}\right) =$$

$$(a+c) \cos\left(\frac{B}{2} - C\right).$$

A 2-a relaţie din enunţ este astfel stabilită.

Soluţie analoagă dată de d-l *Popa Vasile* (Polit., Timişoara). Alte soluţii mai lungi date de d-nii: *Birănaş Ion* (Polit., Timişoara), *Beşchea Radu* (Polit., Bucureşti), *Novac Ioan* (Lic. Brăila), *Stroescu Florea* (Lic. Caracal) şi *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti).

Soluţia 2-a. Folosim metoda din articolul autorului problemei: *„Relaţii remarcabile într'un triunghiu“*, „R.M.T.“, Anul XXV, No. 6.

In acest scop construim un triunghiu oarecare A B C, prelungim spre stânga latura C B cu distanţa $B B_1 = A B = c$ şi considerăm triunghiul

$A_1 B_1 C_1$ în care vârfurile A_1 şi C_1 coincid respectiv cu A şi C.

In acest triunghiu $A_1 B_1 C_1$ observăm cu uşurinţă, ţinând seamă de notaţiile obicinuite, că avem

$$A_1 = A + \frac{B}{2} \quad B_1 = \frac{B}{2}, \quad C_1 = C,$$

(1)

$$a_1 = a + c, \quad b_1 = b, \frac{c_1}{\sin B} = \frac{c}{\sin \frac{B}{2}},$$

deci

$$c_1 = 2c \cos \frac{B}{2}.$$

In acest triunghiu $A_1 B_1 C_1$ scrim acum relaţiile

(2)
$$b_1 \cos C_1 - c_1 \cos B_1 = \frac{b_1^2 - c_1^2}{a_1}$$

$$b_1 \cos B_1 + c_1 \cos C_1 = a_1 \cos (B_1 - C_1),$$

stabilite în „Culegere de Probleme de Trigonometrie“, de *V. Cristescu*, partea II-a, p. 7.

Expresiile (2) în baza relaţiilor (1) devin respectiv

$$b \cos C - 2c \cos^2 \frac{B}{2} = \frac{b_1^2 - 4c^2 \cos \frac{B}{2}}{a + c},$$

$$(b + 2c \cos C) \cos \frac{B}{2} = (a + c) \cos \left(B - \frac{C}{2}\right),$$

care sunt tocmai relaţiile cerute.

Soluţii date de d-nii: *Bogza Mihai* (Lic. Roman), *Giurconiu Mihail* (Polit, Timişoara) şi *Teiuşanu Horia* (Lic. Beiuş).

Problema 2364. — *Ştiind că* $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, *se cere să se arate că funcţiile*

$$y = \operatorname{arc\,sp} x, \quad z = \operatorname{arc\,tg} \frac{x - a}{1 - a + (2a - 1)x}$$

au aceiaşi derivată. Să se explice rezultatul.

V. ALACI

Soluţie. Ştim din „Trigonometria patratică“, p. 38, că derivata primei funcţii, când arcul este în primul cadran, este

(1)
$$y' = \frac{1}{1 - 2x + 2x^2}.$$

De altă parte avem

(2)
$$z' = \frac{1}{1 - \frac{(x-a)^2}{[1-a+(2a-1)x]^2}} \cdot \frac{1-a+(2a-1)x-(2a-1)(x-a)}{[1-a+(2a-1)x]^2}$$

$$= \frac{1 - 2a + 2a^2}{[1 - a + (2a - 1)x]^2 + (x - a)^2}.$$

Cum numitorul se mai poate scri

$$[1 - a + (2a - 1)x]^2 + (x - a)^2 =$$
$$1 + a^2 + (2a - 1)^2 x^2 - 2a - 2a(2a - 1)x + 2(2a - 1)x$$
$$+ x^2 + a^2 - 2ax = 1 - 2a + 2a^2 - 2(1 - 2a + 2a^2)x$$
$$+ 2(1 - 2a + 2a^2)x^2 = (1 - 2a + 2a^2)(1 - 2x + 2x^2),$$

rezultă că relaţia (2) devine

(3)
$$z' = \frac{1 - 2a + 2a^2}{(1 - 2a - 2a^2)(1 - 2x + 2x^2)} = \frac{1}{1 - 2x + 2x^2}.$$

Din (1) şi (3) se vede cu funcţiile date au aceiaşi derivată.

Explicarea rezultatului. Trecând la funcţiile inverse celor din enunţ, avem

$$x = \operatorname{sp} y, \quad \frac{x - a}{1 - a + (2a - 1)x} = \operatorname{tg} z.$$

Inlocuind în a 2-a din aceste relaţii pe x cu valoarea sa din prima relaţie, avem

(4)
$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sp} y - a}{1 - a + (2a - 1) \operatorname{sp} y}.$$

Dar, când $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, din „Trig. patratică“ avem

(5)
$$\operatorname{sp} y = \frac{\operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} y},$$

apoi putem determina un arc α astfel ca să avem

(6)
$$a = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}.$$

In baza relaţiilor (5) şi (6), relaţia (4) devine

$$\operatorname{tg} z = \frac{\frac{\operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} y} - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}}{1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} + \left(\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} - 1\right) \frac{\operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} y}}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} \alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg} y+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg} y-\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg} y+(\operatorname{tg}\alpha-1)\operatorname{tg} y}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} \alpha}{1+\operatorname{tg} y \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg}(y-\alpha).$$

De aci rezultă, făcând abstracție de un multiplu de π,

$$y - z = \alpha.$$

Funcțiile y și z diferind printr'o constantă, au aceiași derivată.

Alte soluții mai lungi date de d-nii: *Arnăutu Marin* (P, T.), *Birănaș Ioan* (P., T), *Constantinescu Ilie* (P, T.), *Giurconiu Mihai* (P., T.), *Serengău Mihai* (P., T.), *Tincu C-tin* (P., T.), și *Vlăduț C-tin* (P., T.).

PROBLEME PROPUSE

2362[1]. — Să se găsească un bipatrat de forma $a\,b\,c\,b\,a$ știind că

$$3\,a\,b = c.$$

I. A. BARBU

2434. — Intr'un sistem de numerație de bază B, să se găsească un număr N de n cifre care divide numărul cifrelor obținute scriind șirul natural a numerilor întregi de la 1 la N.

V. THÉBAULT

2435. — Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{x+\sqrt{(2x+a-2)(2-a)}}+\sqrt{x-\sqrt{(2x+a-2)(2-a)}}=\sqrt{2a}$$

și apoi să se verifice.

MAIOR C. I. IONESCU-TIU

2436. — Intr'un triunghiu isoscel ($B = C$), avem relația

$$\frac{b^m \log\cos C - c^m \log\cos B}{b^n \log\sin C - c^n \log\sin B} = -\,b^{m-n}\,\frac{\operatorname{tg}^2 B + m\log\cos B}{1+n\log\sin B}.$$

V. ALACI

[1]) Problema cu acest număr, publicată în Vol. XXV, p. 98, se propune din nou cu enunțul corectat.

2118[2]. — Să se construiască un triunghiu A B C cunoscând în plan poziția și mărimea laturei B C, un cerc pe care se află vârful A și lungimea unei mediane.

G L GH BUICLIU

2437. — Se consideră un trapez dreptunghic A B C D în care $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90^0$, și $A B = B C$. Dacă M_1 este mijlocul lui C D, să se demonstreze că perpendiculara din C pe $B M_1$ trece prin mijlocul M_2 al lui A D.

VIRGIL GHITESCU

2438. — In triunghiul B A C, înscris în cercul O, fie H ortocentrul, E piciorul mediatoarei pe A C, D L dreapta care unește mijloacele lui A B și A H. Să se arate că figura D O E L este un paralelogram și să-i-se calculeze suprafața în funcție de elementele triunghiului B A C (laturi, unghiuri, suprafață).

CPT. G P. BOERESCU

2439. — Să se arate că dacă

$$\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = 0, \\ \sin a + \sin b + \sin c = 0, \end{cases}$$

atunci avem

$$\operatorname{tg}(a+b+c) = \frac{\sin 3a + \sin 3b + \sin 3c}{\cos 3a + \cos 3b + \cos 3c}.$$

ILIE CONSTANTINESCU

INFORMAȚIE.

Problema 2429 publicată în N-rul trecut este propusă de d-ra *Maria Neumann*

La problema 2427, în rândul al 4-lea, în loc de DD=R, trebuie C D = R, iar fracția $\frac{6}{5+3\sqrt{3}}$ trebuie înlocuită prin $\frac{3}{\sqrt{3}+1}$.

[2]) Problema 2118 propusă la p, 12, Vol. XXIII, având enunțul greșit se anulează și se înlocuește cu prezenta.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Brasch Andrei (2393, 2404), 2407, 2409, 2413, 2416, 2419, 2429); *Costin Alexandrina* (2350, 2391, 2396, 2403, 2413); *Ciucescu Pavel* (2403, 2410, 2418, 2424); *Corduneanu C-tin* (P; 2241, 2245, 2246, 2247, 2403, 2405, 2409, 2418, 2419, 2424); *Diaconu Vasile* (2410, 2417, 2420, 2424); *Filimon Ioan* (P.); *Gherlan Vasile* (P; 2403, 2405 2406, 2410, 2411, 2413, 2419, 2424); *Giurconiu Mihai* (P; 1668, 1687, 1689, 1704, 1727, 1766, 1777, 1784, 1916, 1917, 2180, 2195, 2234, 2271, 2273, 2276, 2287, 2302, 2314, 2321, 2323, 2331, 2345, 2354, 2360, 2370, 2376, 2394, 2397, 2410, 2411, 2413, 1416, 2417, 2418, 2419, 2420, 2423, 2424); *Peţanca Dacia* (2427, 2429, 2430, 2431); *Peţanca Doina* (2424); *Gligor Ioan* (P; 2331, 2354, 2362, 2399, 2408, 2413, 2418, 2419, 2323, 2424, 2429, 2430, 2431; *Guttman Tiberiu* (1975, 2399, 2418, 2424); *Hurezeanu Romulus* (P); *Iliea Vasile* (2389, 239; 2400, 2413, 2419, 2424); *Ion Ion* (2424); *Loziciu I.* (P.) 1 *Pisanca Ionel* (2233, 2234, 2250. 2276, 2289, 2297, 2298);, *Scoridor Gh*, (2410, 2413, 2418, 2419, 2420, 2424); *Stanciu Valeriu* (P; 2424); *Stern Tiberiu* (2409, 2413, 2419, 2423, 2424); *Teodorescu Petre* (N; P; 2218, 2225, 2233, 2234, 2250, 2261, 2266, 2273, 2275, 2276, 2279, 2281, 2287, 2291, 2297, 2301, 2302, 2303, 2321, 2327, 2348, 2361, 2384, 2385, 2400, 2406, 2407, 2410, 2411, 2413, 2414, 2416, 2417, 2418, 2419, 2420, 2423, 2424, 2425); *Tincu C-tin* (2375, 2387, 2392, 2417, 2418, 2419, 2423, 2424, 2429, 2430, 2431), *Tuca Marcu* (2005, 2406, 2410, 2411, 2413, 2416, 2419 2420, 2424).

INFORMAŢIUNI

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, pentru a fi luate în consideraţie, trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Rugăm pe corespondenţii noştrii. ca problemele propuse să fie însoţite de soluţiile corespunzătoare.

Legându-se colecţiileR. M. T., anii II-XXV, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 1200 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II—XXV, cu preţul de lei 8000 volumul şi se trimet la cerere.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

ANUL XXVI. AUGUST 1946 No. 6.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITATEA
SIBIU

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 1000 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 8000 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 20.000 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **V. ALACI:** FUNCTII TRIGONOMETRICE INVERSE SI FUNCTII LOGARITMICE CARE AU ACEIASI DERIVATA.
2. NOTE MATEMATICE 15, 16, 17.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 1067, 2169, 2360.
5. PROBLEME PROPUSE: 2440 - 2447.
6. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timișoara.
Înreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Pentru nouii abonaţi, costul abonamentului pentru anul XXVI (15 Martie 1946 — 15 Februarie 1947) este de 8000 (opt mii) lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale, vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Politehnica Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Politehnica Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Politehnica Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXVI, de 8000 (opt mii) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXV inclusiv, broşate, 8000 lei fiecare.

ANUL XXVI — No. 6. TIMISOARA, AUGUST 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 1000 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 8000 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Politehnica Timișoara.

FUNCȚII TRIGONOMETRICE INVERSE ȘI FUNCȚII LOGARITMICE CARE AU ACEIAȘI DERIVATĂ

DE

V. ALACI

Articolul *„Funcții trigonometrice inverse cu aceiași derivată“*, pe care l-am publicat în „R. M. T.“, Vol. XXV, N-rile 11 și 12 și Vol. XXVI, No 1, se termina cu următoarele rânduri: „Cu un nou prilej ne vom ocupă de alte probleme analoage și în special vom arăta cum putem construi funcții logaritmice și funcții trigonometrice inverse care să aibă aceiași derivată“.

Ca urmare, în acest articol, vom învedera *cum se pot construi funcții trigonometrice inverse și funcții logaritmice care să aibă aceiași derivată.*

Odată construite oricâte probleme de acest fel, *vom da și o metodă simplă — fără a folosi operația de derivare — care să permită a recunoaște dacă astfel de funcții date au sau nu aceiași derivată.* Operația de derivare ne-ar putea servi numai pentru verificare. Vom trata și unele chestiuni conexe. În acest scop vom soluționa mai multe probleme care să pună în lumină afirmațiile noastre.

I.

Problema 1-a. *Se dau funcțiile*

$$(1)\qquad y=\operatorname{arctg} Y,\quad z=\frac{1}{2i}\lg Z,\quad (i=\sqrt{-1}),$$

unde Y *și* Z *depind de variabila* x. *Cunoscând pe* Y, *să se determine* Z *astfel ca funcțiile* (1) *să aibă aceiași derivată. Să se explice rezultatul.*

Soluția 1-a Derivatele funcțiilor (1) trebuind să fie egale, rezultă

$$z=y+C,\quad (C \text{ un arc oarecare}).$$

Luând tangenta în amîbii membri, avem

$$(2)\qquad \operatorname{tg} z=\frac{\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} C}{1-\operatorname{tg} y\operatorname{tg} C}.$$

Cum din (1) deducem

$$\operatorname{tg} y=Y,\qquad e^{2iz}=Z$$

și cum în baza formulelor lui *Euler,* avem

$$\operatorname{tg} z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})}=\frac{e^{2iz}-1}{i(e^{2iz}+1)}=\frac{Z-1}{i(Z+1)},$$

relația (2) devine

$$\frac{Z-1}{Z+1}=i\,\frac{Y+\operatorname{tg} C}{1-Y\operatorname{tg} C}.$$

Aplicând o proprietate a proporțiilor, obținem

$$Z=\frac{1+i\operatorname{tg}C+(i-\operatorname{tg}C)Y}{1-i\operatorname{tg}C-(i+\operatorname{tg}C)Y}=\frac{1+i\operatorname{tg}C+i(1+i\operatorname{tg}C)Y}{1-i\operatorname{tg}C-i(1-i\operatorname{tg}C)Y},$$

sau

$$(3)\qquad Z=\frac{1+i\operatorname{tg}C}{1-i\operatorname{tg}C}\cdot\frac{1+iY}{1-iY}.$$

Dar,

$$\frac{1+i\operatorname{tg}C}{1-i\operatorname{tg}C}=\frac{\cos C+i\sin C}{\cos C-i\sin C}=e^{2iC}=A,\quad (A\neq 0)$$

astfel că relația (3) ne dă

$$(I)\qquad \boxed{Z=A\,\frac{1+iY}{1-iY}},$$

unde A este o constantă $\neq 0$.

Prin urmare putem enunța: *Funcțiile*

$$(4)\quad y=\operatorname{arc\,tg} Y,\quad z=\frac{1}{2i}\lg A\,\frac{1+iY}{1-iY},\quad (i=\sqrt{-1})$$

au aceiași derivată.

Soluția 2-a. Putem ajunge, mult mai simplu, la formula (I), folosind însă cunoștinți de *Calcul Integral.*

În adevăr, fie Y o funcție de variabila x și Y' derivata sa.

Să considerăm identitatea

$$\frac{1}{1+Y^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-iY}+\frac{1}{1+iY}\right),\quad (i=\sqrt{-1}).$$

Înmulţim această egalitate cu $Y'\,dx$ şi apoi o integrăm. Observând că în ambii membri avem integrale imediate, obţinem

$$\operatorname{arc\,tg} Y=-\frac{1}{2i}\lg(1-iY)+\frac{1}{2i}\lg(1+iY)+\frac{1}{2i}\lg A,$$

sau

$$\operatorname{arc\,tg} Y=\frac{1}{2i}\lg A\frac{1+iY}{1-iY}=\frac{1}{2i}\lg Z,$$

deci

$$Z=A\frac{1+iY}{1-iY},$$

care este tocmai formula (I).

Explicarea rezultatului. Vom arăta acum, direct, că funcţiile din (4) au aceiaşi derivată.

În adevăr, din (4) deducem

$$Y=\operatorname{tg} y,\qquad A\frac{1+iY}{1-iY}=e^{2iz},$$

Relaţia 2-a în virtutea primei ne dă

$$A\frac{1+i\operatorname{tg} y}{1-i\operatorname{tg} y}=e^{2iz},$$

sau,

$$(5)\qquad A\frac{\cos y+i\sin y}{\cos y-i\sin y}=Ae^{2iy}=e^{2iz}.$$

Dar, cum putem determina constanta C astfel ca să avem

$$A=e^{2iC},\qquad \left(C=\frac{1}{2i}\lg A\right),$$

relaţia (5) devine

$$e^{2i(y+C)}=e^{2iz}.$$

De aci rezultă, făcând abstracţie de un multiplu de 2π,

$$z-y=C.$$

Astfel, funcţiile z şi y din (4) diferind printr'o constantă, urmează că au aceiaşi derivată.

Aplicaţii. 1°. Pentru $Y=x$, formula (I) ne dă

$$Z=A\frac{1+ix}{1-ix},\quad (i=\sqrt{-1}).$$

Putem deci enunţa: *Funcţiile*

$$(6)\quad y=\operatorname{arc\,tg} x,\quad z=\frac{1}{2i}\lg A\frac{1+ix}{1-ix},\quad (i=\sqrt{-1})$$

au aceiaşi derivată.

2°. Pentru $Y=i\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2$, $(i=\sqrt{-1})$ şi $A=\frac{1}{4}$, formula (I) ne dă

$$Z=\frac{x}{x^2+4}.$$

Putem deci enunţa: *Funcţiile*

$$(7)\quad y=\operatorname{arctg} i\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2,\quad z=\frac{1}{2i}\lg\frac{x}{x^2+4},\quad (i=\sqrt{-1}),$$

au aceiaşi derivată.

Problema 2-a. *Se dau funcţiile*

$$(8)\qquad y=\operatorname{arctg} Y,\quad z=\frac{1}{2i}\lg Z,\quad (i=\sqrt{-1}),$$

unde Y *şi* Z *depind de variabila* x. *Cunoscând pe* Z, *să se determine* Y *astfel ca funcţiile* (8) *să aibă aceiaşi derivată. Să se explice rezultatul.*

Soluţie. Este suficient a rezolva în raport cu Y relaţia (I) din problema precedentă, ceea ce ne dă

$$(I_1)\qquad \boxed{Y=i\frac{A-Z}{A+Z}},\quad (A\neq 0).$$

Putem deci enunţa: *Funcţiile*

$$(9)\quad y=\operatorname{arctg} i\frac{A-Z}{A+Z},\quad z=\frac{1}{2i}\lg Z,\quad (i=\sqrt{-1}),$$

au aceiaşi derivată. A *este o constantă* $\neq 0$, *iar* Z *este o funcţie oarecare de variabila* x.

Explicarea rezultatului. Din (9) deducem

$$\operatorname{tg} y=i\frac{A-Z}{A+Z},\quad Z=e^{2iz},$$

deci putem scri

$$\operatorname{tg} y=i\frac{A-e^{2iz}}{A+e^{2iz}}.$$

Înlocuind constanta A printr'o altă constantă C definită de relaţia $A=e^{2iC}$, putem scri succesiv

$$\operatorname{tg} y=i\frac{e^{2iC}-e^{2iz}}{e^{2iC}+e^{2iz}}=i\frac{1-e^{2i(z-C)}}{1+e^{2i(z-C)}}$$

$$=-i\frac{e^{i(z-C)}-e^{-i(z-C)}}{e^{i(z-C)}+e^{-i(z-A)}}=-i\frac{2i\sin(z-C)}{2\cos(z-C)},$$

sau

$$\operatorname{tg} y=\operatorname{tg}(z-C).$$

De aci rezultă, făcând abstracţie de un multiplu de π,

$$z-y=C,$$

astfel că funcţiile y şi z diferind printr'o constantă, au aceiaşi derivată.

Aplicaţii: 1°. Pentru $Z=x$, formula (I_1) ne dă

$$Y=i\frac{A-x}{A+x}.$$

Putem deci enunţa: *Funcţiile*

$$(10)\quad y=\operatorname{arc\,tg} i\frac{A-x}{A+x},\quad z=\frac{1}{2i}\lg x,\quad (i=\sqrt{-1}),$$

au aceiaşi derivată.

2°. Pentru $Z=\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2$, $A=1$, formula (I_1) ne dă

$$Y=i\frac{1-\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2}{1+\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2}=\frac{4ix}{x^2+2}.$$

Putem deci enunţa: *Funcţiile*

$$y=\operatorname{arc\,tg}\frac{4ix}{x^2+4},\quad z=\frac{1}{i}\lg\frac{x-2}{x+2},\quad (i=\sqrt{-1}),$$

au aceiaşi derivată.

Problema 3-a. *Se dau funcţiile*

$$(11)\quad y=\arcsin Y,\quad z=\frac{1}{2i}\lg Z,\quad (i=\sqrt{-1}),$$

unde Y *şi* Z *depind de variabila* x. *Cunoscând pe* Y, *să se determine* Z *astfel ca funcţiile* (11) *să aibă aceiaşi derivată. Să se explice rezultatul.*

Soluţia 1-a. Derivatele funcţiilor din (11) trebuind să fie egale, rezultă

$$z=y+C,$$

deci

$$(12)\quad \operatorname{tg} z=\frac{\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} C}{1-\operatorname{tg} y\operatorname{tg} C}=\frac{\sin y+\cos y\operatorname{tg} C}{\cos y-\sin y\operatorname{tg} C}.$$

Cum din (11) deducem

$$(13)\quad \sin y=Y,\quad e^{2iz}=Z,\quad \text{deci}\quad \cos y=\pm\sqrt{1-Y^2},$$

relaţia (12) devine

$$(14)\qquad \operatorname{tg} z=\frac{Y\pm\sqrt{1-Y^2}\operatorname{tg} C}{\pm\sqrt{1-Y^2}-Y\operatorname{tg} C}.$$

Conform formulelor lui *Euler* şi a relaţiei a 2-a din (13), avem

$$\operatorname{tg} z=\frac{e^{iz}-e^{-ix}}{i(e^{iz}+e^{-iz})}=\frac{e^{2iz}-1}{i(e^{2iz}+1)}=\frac{Z-1}{i(Z+1)}$$

astfel că relaţia (13) ne dă

$$\frac{Z-1}{Z+1}=i\frac{Y\pm\sqrt{1-Y^2}\operatorname{tg} C}{\pm\sqrt{1-Y^2}-Y\operatorname{tg} C}.$$

De aci deducem succesiv

$$Z=\frac{\pm\sqrt{1-Y^2}(1+i\operatorname{tg} C)+(i-\operatorname{tg} C)Y}{\pm\sqrt{1-Y^2}(1-i\operatorname{tg} C)-(i+\operatorname{tg} C)Y}=$$

$$\frac{\pm\sqrt{1-Y^2}(1+i\operatorname{tg} C)+i(1+i\operatorname{tg} C)Y}{\pm\sqrt{1-Y^2}(1-i\operatorname{tg} C)-i(1-i\operatorname{tg} C)Y},$$

sau

$$(15)\qquad Z=\frac{1+i\operatorname{tg} C}{1-i\operatorname{tg} C}\cdot\frac{\pm\sqrt{1-Y^2}+iY}{\pm\sqrt{1-Y^2}-iY}=$$

$$\frac{1+i\operatorname{tg} C}{1-i\operatorname{tg} C}\cdot\left(iY\pm\sqrt{1-Y^2}\right)^2.$$

Dar, înlocuind constanta C printr'o altă constantă A, definită de relaţia

$$\frac{1+i\operatorname{tg} C}{1-i\operatorname{tg} C}=\frac{\cos C+i\sin C}{\cos C-i\sin C}=e^{2iC}=A^2,\quad (A\neq 0),$$

urmează că relaţia (15) devine

$$(II)\qquad \boxed{Z=\left[A\left(iY\pm\sqrt{1-Y^2}\right)\right]^2}.$$

Prin urmare putem enunţa: *Funcţiile*

$$(16)\quad y=\arcsin Y,\quad z=\frac{1}{i}\lg A\left(iY\pm\sqrt{1-Y^2}\right),$$

$$(i=\sqrt{-1}\ \text{şi}\ A\neq 0),$$

au aceiaşi derivată. A *este o constantă reală sau imaginară* $\neq 0$, *iar* Y *este o funcţie oarecare de variabila* x.

Soluţia 2-a. Considerăm identitatea

$$\frac{1}{\pm\sqrt{1-Y^2}}=\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{\pm\sqrt{Y^2-1}},\quad (i=\sqrt{-1}),$$

unde Y este o funcţie de variabila x.

Înmulţim această relaţie cu $Y'\,dx$ şi apoi o integrăm. Observând că în ambii membri avem integrale imediate, obţinem

$$\arcsin Y=\frac{1}{i}\lg\left(Y\pm\sqrt{Y^2-1}\right)+$$

$$\frac{1}{i}\lg A=\frac{1}{i}\lg A\left(Y\pm\sqrt{Y^2-1}\right)=$$

$$\frac{1}{2i}\lg\left[A\left(Y\pm\sqrt{Y^2-1}\right)\right]^2=\frac{1}{2i}\lg Z,$$

deci

$$Z=\left[A\left(Y\pm\sqrt{Y^2-1}\right)\right]^2,$$

care este analoagă cu formula (II), numai că acolo constanta A, de aci, este înlocuită cu iA.

Explicarea rezultatului. Din (16) deducem

$$\sin y=Y,\quad e^{iz}=A\left(iY\pm\sqrt{1-Y^2}\right).$$

A 2-a dintre aceste relații, ținând seamă de prima, devine

(17) $$e^{iz}=A(\cos y+i\sin y)=Ae^{iy}.$$

În locul constantei A, luând o altă constantă C definită de relația

$$A=e^{iC},$$

rezultă că relația (17), devine

$$e^{iz}=e^{iC}\,e^{iy}=e^{i(y+C)},$$

de unde urmează, abstracție făcând de un multiplu de 2π,

$$z-y=C.$$

Astfel funcțiile z și y, diferind printr'o constantă, au aceiași derivată.

Aplicații. 1°. Pentru $Y=x$, relațiile (16) permit a afirma: *Funcțiile*,

(18) $$y=\arcsin x,\quad z=\frac{1}{i}\lg A\left(ix\pm\sqrt{1-x^2}\right),\quad (i=\sqrt{-1}),$$

au aceiași derivată.

2°. Pentru $Y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, relațiile (16) permit a afirma: *Funcțiile*

(19) $$y=\arcsin\frac{x^2+1}{x^2-1},\quad z=\frac{1}{i}\lg A\,\frac{x\pm1}{x\mp1},\quad (i=\sqrt{-1})$$

au aceiași derivată. Am înlocuit constanta Ai, prin A.

Problema 4-a. *Se dau funcțiile*

(20) $$y=\arcsin Y,\quad z=\frac{1}{2i}\log Z,\quad (i=\sqrt{-1}),$$

unde Y *și* Z *depind de variabila* x. *Cunoscând pe* Z, *să se determine* Y *astfel ca funcțiile din* (20) *să aibă aceiași derivată. Să se explice rezultatul.*

Soluție. Am putea proceda direct ca în *problema 3-a*, dar tocmai vom profita de formula (II) stabilită acolo.

In adevăr, din formula (II) din *problema 3-a*, deducem

$$A\left(iY\pm\sqrt{1-Y^2}\right)=\pm\sqrt{Z},$$

sau

$$\pm A\sqrt{1-Y^2}=\pm\sqrt{Z}-iAY.$$

Ridicând la patrat, obținem

$$A^2(1-Y^2)=Z-A^2Y^2\mp2iAY\sqrt{Z},$$

sau

$$\pm2iA\sqrt{Z}Y=Z-A^2,$$

deci

(II$_1$) $$\boxed{Y=\pm\frac{Z-A}{2i\sqrt{AZ}}},\quad (A\neq0),$$

unde am înlocuit constanta A^2 prin A.

Prin urmare putem enunța: *Funcțiile*

(21) $$y=\arcsin\frac{Z-A}{2i\sqrt{AZ}},\quad z=\frac{1}{2i}\lg Z,$$
$$(i=\sqrt{-1}\ \text{și}\ A\neq0),$$

au aceiași derivată. Am luat semnul + înaintea lui Y din (II$_1$).

Explicarea rezultatului. Din (21) deducem

(22) $$\sin y=\frac{Z-A}{2i\sqrt{AZ}}=\frac{1}{2i}\left(A^{-\frac{1}{2}}Z^{\frac{1}{2}}-A^{\frac{1}{2}}Z^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Cum din a 2-a din relațiile (21), avem $Z=e^{2iz}$, rezultă că relația (22), în care înlocuim constanta A prin C definită de relația $A=e^{-2iC}$, devine

$$\sin y=\frac{e^{i(z+C)}-e^{-i(z+C)}}{2i}=\sin(z+C).$$

De aci rezultă, făcând abstracție de un multiplu de 2π, că

$$y-z=C.$$

Astfel funcțiile y și z, diferind printr'o constantă, au aceiași derivată.

Aplicații. 1°. Pentru $Z=x^2$ și $A=-1$, relațiile (21), în care luăm $\sqrt{-x^2}=-ix$, ne permit a afirma că: *Funcțiile*

(23) $$y=\arcsin\frac{x^2+1}{2x},\quad z=\frac{1}{i}\lg x,\quad (i=\sqrt{-1}),$$

au aceiași derivată.

2°. Pentru $Z=\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2$ și $A=-1$, relațiile (21) ne permit a afirmă că: *Funcțiile*

(24) $y=\arcsin\frac{1+x^4}{1-x^4}$, $z=\frac{1}{i}\lg\frac{x^2-1}{x^2+1}$, $(i=\sqrt{-1})$,

au aceiaşi derivată.

(Va urma)

NOTE MATEMATICE

15. — *Sur la parabole.*

Théorème. *Dans tout quadrilatère complet circonscrit à une parabole, le barycentre des quatre points de contact est sur la droite de Newton.*

Soient M, N, P les milieux des diagonales AC, BD, EF d'un quadrilatère complet ABCDEF dont les côtés opposés AB et CD, BC et DA se rencontrent en E, F.

La parabole (π) inscrite à ce quadrilatère, dont l'axe Δ est parallèle à la droite de *Newton* $\Delta'\equiv(M,N,P)$, touche les côtés AB, BC, DA en A', B', C', D'.

Le barycentre Ω des points A', B', C', D' est au milleu du segment rectiligne joignant les milieux K et L de A'C' et B'D'. Or les droites EK, FL sont des diamètres de la parabole, donc parallèles à Δ', de sorte que la droite ΩP est parallèle à EK, donc à Δ et Δ'. Comme P est sur Δ', la droite ΩP coïncide avec la droite de *Newton* Δ' et le théorème est démontré.

Ce théorème, pourtant très simple, ne nous paraît pas avoir été remarqué.

V. THÉBAULT

16. — *O rectificare.*

În F. G. M. *Exercices de Géométrie*, ed. 7, la pag. 900 se găseşte teorema 707 II, 1855a: *Un plan care divide două muchi opuse ale unui tetraedru într'un raport dat, divide solidul în acelaşi raport.*

Observ mai întâi că enunţul nu este precis fiindcă în ipoteză, un raport poate fi luat şi invers.

Revin la text, fig. 1211. Se notează A, B, C, D vârfurile tetraedrului şi E, F, G, H intersecţiile planului cu muchile AD, BC, AC, BD asfel ca

$$(1)\qquad \frac{\overline{AE}}{\overline{ED}}=\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}.$$

Planul desface tetraedrul în două solide, unul format din piramidele A—FGEH şi BAFH; altul, din D—FGEH şi CDFG. Piramidele patrulatere au aceiaşi bază deci, notând în paranteză volumul,

$$(2)\qquad \frac{(A-FGEH)}{(B-FGEH)}=\frac{\overline{AE}}{\overline{ED}}.$$

Cunoaştem apoi teorema: *dacă* A', B', C' *sunt puncte luate pe muchile* DA, DB, DC, *avem*

$$\frac{(DA'B'C')}{(DABC)}=\frac{\overline{DA'}.\overline{DB'}.\overline{DC'}}{\overline{DA}.\overline{DB}.\overline{DC}},$$

deci

$$\frac{(BAFH)}{(ABCD)}=\frac{\overline{BF}.\overline{BH}}{\overline{BC}.\overline{BD}},\quad \frac{(CDFG)}{(ABCD)}=\frac{\overline{CG}.\overline{CE}}{\overline{CA}.\overline{CB}},$$

de unde

$$(3)\qquad \frac{(BAFH)}{(CDFG)}=\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}\cdot\frac{\overline{BH}}{\overline{BD}}\cdot\frac{\overline{CA}}{\overline{CG}}$$

în locul citat, primul raport pin partea a doua este omis. Cel de al doilea raport este calculat în virtutea teoremei (1800, pag. 876): *orice plan* EFGH *dus prin două puncte* E, F *care divid în acelaşi raport două laturi opuse într'un patrulater strâmb, divid celelalte două laturi în* G, H *într'un acelaşi raport.*

Teorema (dată fără demonstraţie) este de fapt o aplicaţie a teoremei *Menelaos*

$$(4)\qquad \frac{\overline{AE}}{\overline{ED}}\cdot\frac{\overline{HD}}{\overline{HB}}\cdot\frac{\overline{FB}}{\overline{FC}}\cdot\frac{\overline{GC}}{\overline{GA}}=1,$$

din care rezultă că dacă

$$(5)\qquad \frac{\overline{AE}}{\overline{ED}}=\frac{\overline{FC}}{\overline{FB}},\ \text{atunci şi}\ \frac{\overline{HD}}{\overline{HB}}=\frac{\overline{GA}}{\overline{GC}}$$

ori ipoteza (1) face să nu putem folosi această aplicaţie pe lângă faptul că noţiunea „acelaşi raport“ este întrebunţată în sensul că toate rapoartele sunt egale.

Pentru ca în relaţia (3) partea a doua să se reducă la primul raport, este necesar ca

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{CG}}{\overline{CA}},\ \text{sau}\ \frac{\overline{BH}}{\overline{B'H}}=\frac{\overline{GC}}{\overline{GA}},$$

ceeace conform cu (5) atrage

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{FB}}$$

şi este egal cu primul raport din (3), dacă F este mijlocul muchei $\overline{BC}$, deci şi E mijlocul muchei $\overline{AD}$, ceeace constitue teorema 1855 (707 I). Problema de care ne ocupăm este deci o generalizare neisbutită.

N. N. MIHAILEANU

---

17. — *Asupra unei teoreme referitoare la pendulul sferic.*

Puiseux a demonstrat că unghiul pe care-l fac două plane meridiane corespunzătoare unui maxim şi unui minim consecutivi, în mişcarea pendulului sferic, e superior lui $\frac{\pi}{2}$. [1] *Mai mult, Saint Germain a arătat elementar că acest unghiu e cuprins între* $\frac{\pi}{2}$ *şi* π, [2] iar *Halphen* a demonstrat teorema folosind funcţiile eliptice [3]. În articolul de faţă voi da o altă demonstraţie acestei teoreme.

Luând ca plan xOy planul tangent sferei în punctul cel mai de jos şi ca axă Oz diametrul vertical corespunzător, un punct depe sferă are coordonatele

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z, \quad r^2 + z^2 - 2lz = 0$$

cu ecuaţiile mişcării

$$r^2\theta' = C \quad \text{şi} \quad lz' = \pm\sqrt{(2gz+h)(2lz-z^2)-C^2}.$$

Unghiul polar θ e

$$\theta = \int_{z_0}^{z} \frac{C\,dz}{\pm(z-z^2)\sqrt{\varphi(z)}},$$

unde am pus

$$\varphi(z) = (2gz+h)(z-z^2) - C^2 = 2g(\alpha-z)(z-\beta)(z-\gamma), \qquad 2l = 1.$$

Se observă pentru zerorile polinomului $\varphi(z)$ neegalităţile $\alpha > \beta$ cuprinse între 0 şi 1, iar $\gamma < 0$. Pentru ca să existe mişcarea, trebuie să avem $\varphi(z) > 0$, care e satisfăcută când $\beta < z < \alpha$.

Constanta ariilor în funcţie de rădăcini este

$$C = \sqrt{-\varphi(0)} = \sqrt{-\varphi(1)} = \sqrt{-2g\alpha\beta\gamma} = \sqrt{2g(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)},$$

pentru simplificare luăm

$$C' = \sqrt{-\alpha\beta\gamma} = \sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}.$$

Unghiul Θ corespunzător planelor meridiane a două extreme consecutive este

$$\Theta = \frac{1}{2}\int_{\beta}^{\alpha} \frac{C'\,dz}{(z-z^2)\sqrt{(\alpha-z)(z-\beta)(z-\gamma)}} = \frac{1}{2}\int_{\beta}^{\alpha} \frac{C'\,dz}{z\sqrt{(z-\gamma)}\sqrt{(\alpha-z)(z-\beta)}} + \frac{1}{2}\int_{\beta}^{\alpha} \frac{C'\,dz}{(1-z)\sqrt{z-\gamma}\sqrt{(\alpha-z)(z-\beta)}},$$

unde $z = \alpha$, $z = \beta$ sunt planele între care se face mişcarea.

Avem

$$I_1 = \int_{\beta}^{\alpha} \frac{dz}{z\sqrt{(\alpha-z)(z-\beta)}} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

şi

$$I_2 = \int_{\beta}^{\alpha} \frac{dz}{(1-z)\sqrt{(\alpha-z)(z-\beta)}} = \frac{\pi}{\sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)}}.$$

Funcţia $Y = \sqrt{z-\gamma}$ are în intervalul de existenţă, valoarea maximă $M = \sqrt{1-\gamma}$.

1. *Să arătăm că* Θ *e superior lui* $\frac{\pi}{2}$.

Ţinând seama de notaţiile precedente, putem scrie

$$\Theta > \frac{1}{2}\frac{C'}{M}I_1 + \frac{1}{2}\frac{C'}{M}I_2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{C'}{\sqrt{\alpha\beta}\cdot\sqrt{1-\gamma}} + \frac{C'}{\sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{\sqrt{\alpha\beta(1-\gamma)}} + \frac{\sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}}{\sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{-\gamma}{1-\gamma}}+1\right),$$

---

[1] Journal de Liouville, 1842.
[2] Bulletin de Sciences Mathematiques, 1896, 1898.
[3] Traité des fonctions elliptiques, I—II, p. 128.

$$\Theta > \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{-\gamma}{1-\gamma}} > \frac{\pi}{2},$$

deoarece γ e negativ.

2. Pentru a demonstra că $\Theta < \pi$ e suficient să arătăm că

$$\text{(I)} \qquad \frac{1}{\sqrt{z-\gamma}} < \frac{1-z}{\sqrt{-\gamma}} + \frac{z}{\sqrt{1-\gamma}}.$$

Ridicând la patrat şi eliminând numitorii, inegalitatea devine

$$\left[(1-\gamma)^{\frac{1}{2}} + z\left(\sqrt{-\gamma} \quad \sqrt{1-\gamma}\right)\right]^2 (z-\gamma) - \gamma(\gamma-1) > 0.$$

Fie

$$F(z) = \left[(1-\gamma)^{\frac{1}{2}} + z\left(\sqrt{-\gamma} - \sqrt{1-\gamma}\right)\right]^2 (z-\gamma)(\gamma-1).$$

Constatăm că zerorile polinomului sunt 0, 1 şi al treilea cuprins între $-\frac{\sqrt{1-\gamma}}{\sqrt{-\gamma}-\sqrt{1-\gamma}}$ şi $+\infty$.

căci

$$F\left(-\frac{\sqrt{1-\gamma}}{\sqrt{-\gamma}-\sqrt{1-\gamma}}\right) < 0,$$

dar

$$-\frac{\sqrt{1-\gamma}}{\sqrt{-\gamma}-\sqrt{1-\gamma}} > 1.$$

Valorile lui z, fiind cuprinse între 0 şi 1, rezultă că inegalitatea (I) e adevărată.

Înmulţind ambii membri ai inegalităţii cu

$$\frac{C'}{2(z-z^2)\sqrt{(\alpha-z)(z-\beta)}}$$

şi integrând, obţinem

$$\frac{1}{2}\int_\beta^\alpha \frac{C'\,dz}{(z-z^2)\sqrt{\varphi(z)}} > \int_\beta^\alpha \frac{C'\,dz}{\sqrt{-\gamma z}\sqrt{(\alpha-z)(z-\beta)}} +$$

$$\frac{1}{2\sqrt{1-\gamma}}\int_\beta^\alpha \frac{C'\,dz}{(1-z)\sqrt{(\alpha-z)(z-\beta)}} =$$

$$\frac{\pi C'}{2\sqrt{-\alpha\beta\gamma}} + \frac{\pi C'}{2\sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}} = \pi,$$

adică $\Theta < \pi$.

BAL LASCU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul LI, No. 11, Iulie 1946. O metodă generală pentru rezolvarea unor probleme de aritmetică, de *O. N. Ţino*. Concursul „Gazeta Matematică". Raport pentru decernarea premiului *„Gh. Ţiţeica"*, de *Serban Gheorghiu, N. N. Mihăileanu, O. N. Ţino*. Probleme rezolvate şi propuse.

2. *Boletin Matematico* (Buenos Aires). Suplemento No 1, Anul XIX, No 3, Mai 1946.

3. *Forţa de inerţie*, de *D. Germani* şi *C. Budeanu*, cu un cuvânt introductiv şi unul de încheere, de *V. Vâlcovici*.

5 *Institutul de Ştiinţe Matematice*. Act constitutiv, statute; comitet, lista membrilor.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1067. — *Fie un triunghiu oarecare* ABC *şi* A_1, B_1, C_1 *punctele unde înălţimele tae cercul circumscris, iar* A_2, B_2, C_2 *punctele diametral opuse în acelaşi cerc. Dreptele* A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 *formează triunghiul* $A'B'C'$. *Să se demonstreze că:*

1°. *Triunghiurile* ABC *şi* $A'B'C'$ *sunt asemenea şi să li se calculeze raportul de asemănare.*

2°. *Dreptele* $A'A_2$, $B'B_2$, $C'C_2$ *sunt concurente.*

3°. *Perpendicularele scoborâte din* A', B', C', *respectiv pe* B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 *sunt concurente.*

CEZAR IVANESCU

Soluţie. 1°. AA_1A_2, fiind înscris într'un semicerc, este drept. Deci $A_1A_2 \perp AH$ şi paralelă cu BC. Analog B_1B_2, C_1C_2 sunt paralele cu AC şi AB. Deci triunghiul $A'B'C'$ are laturile paralele cu laturile triunghiului ABC şi este asemenea cu acesta.

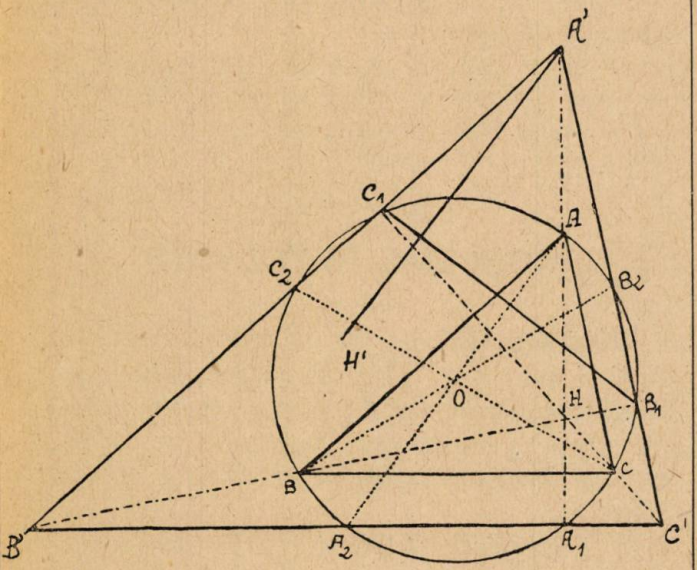
Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Se ştie că BC este perpendiculară pe mijlocul lui HA_1 şi fiind paralelă cu A_2A_1, urmează că aceasta tae pe HC şi HB în simetricele lui H faţă de C şi B. La fel B_1B_2 tae pe HC în simetricul lui H faţă de C. Deci A', B', C' se află pe AH, BH, CH şi anume în simetricele lui H faţă de A_1B_1C. Rezultă că raportul de asemănare ale celor 2 triunghiuri este:

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{AC} = \frac{A'B'}{AB} = 2.$$

2°. Figura $A B_2 A_2 B$ este evident un dreptunghiu înscris în cercul O, deci

$$A_2 B_2 = A B = \frac{A' B'}{2},$$

ceiace arată că A_2, B_2 sunt mijloacele laturilor $B' C'$, $C' A'$ şi atunci $A' A_2$, $B' B_2$, $C' C_2$ sunt concurente ca mediane în triunghiul $A' B' C'$.



3°. Dreptele $A' A_1$, $B' B_1$, $C' C_1$ fiind înălţimi în triunghiul $A' B' C'$ sunt bisectoarele unghiurilor triunghiului $A_1 B_1 C_1$ şi cum A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A, B, C sunt pe cercul celor 9 puncte ale triunghiului $A' B' C'$ urmează că A este mijlocul arcului $C_1 A B_1$ şi că $A A_2$ este perpendiculară pe $B_1 C_1$, deci paralelă cu perpendiculara $A' H'$ din A' pe $B_1 C_1$. Dreapta $A A_2$ fiind diametru în cercul ABC şi laturile triunghiurilor $A B C$, $A' B' C'$ fiind asemeni rezultă că şi $A' H' \parallel A A_2$ va fi diametru în cercul $A' B' C'$. Dreptele $A' H'$, $B' H'$, $C' H'$ sunt prin urmare concurente în centrul cercului $A' B' C'$.

Au trimiş foarte bune soluţii analoage: *Coandă I. Virgil* (Şc. Pregătitoare de ofiţeri), *Fabius Dorina* (studentă, Cluj), *Leher Margareta* (studentă, Cluj), *Margulius Maurius* (Bucureşti). *Mehedinţi D. D-tru* (lic. militar, Tg.-Mureş), *Mihăileanu N. N.* (Constanţa), *Motoc D. Mircea* (Oltenita), *Nenciulescu H.* (Tg.-Mureş) şi *Süli Mihai* (Politehnica, Timişoara).

G-l Gh. B.

Problema 2169. — *Dacă într'un triunghiu, în care notaţiile sunt cele obicinuite, unim ortocentrul* H *cu mijlocul* C' *a laturei* AB, *apoi notăm* $HC' = n$ *şi* $\sphericalangle A C' H = \gamma$, *avem relaţiile*:

$$c^2 = 4 [n^2 \cos 2\gamma + a b \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B \cos (B - A)].$$

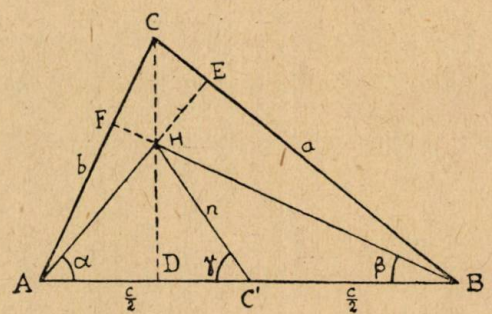
$$n^2 \sin 2\gamma = a b \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B \sin (A - B).$$

V. ALACI

Soluţie. Construim triunghiul A B C, ducem înălţimele şi fie H ortocentrul. Unim H cu C' mijlocul AB şi notăm $\sphericalangle BAH = \alpha$, $\sphericalangle ABH = \beta$.

Din triunghiurile dreptunghice AEB şi AFB rezultă

$$(1) \qquad \alpha = \frac{\pi}{2} - B, \quad \beta = \frac{\pi}{2} - A.$$



În triunghiul AHB teorema sinusurilor ne dă

$$\frac{A H}{\sin \beta} = \frac{B H}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin (\alpha + \beta)}$$

şi ţinând seamă de (1) şi de triunghiul ABC, mai putem scri

$$\frac{A H}{\cos A} = \frac{B H}{\sin B} = \frac{c}{\sin (A + B)} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

De aci deducem

$$(2) \quad AH = a \frac{\cos A}{\sin A} = a \operatorname{cotg} A, \quad BH = b \frac{\cos B}{\sin B} = b \operatorname{cotg} B.$$

Cu această pregătire vom stabili acum relaţiile date.

1. Din triunghiul dreptunghic DHC' rezultă

$$n \sin \gamma = \overline{HD}, \quad n \cos \gamma = \overline{DC'}.$$

Ridicând la patrat şi scăzând, obţinem

$$(3) \qquad n^2 (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) = \overline{DC'}^2 - \overline{HD}^2.$$

Dar observăm din figură că

$$\overline{DC'} = \overline{DB} - \overline{C'B} = \overline{HB} \sin A - \frac{c}{2},$$

$$\overline{DC'} = \overline{AC'} - \overline{AD} = \frac{c}{2} - \overline{HA} \sin B.$$

Înmulțind aceste relații, avem

$$(4)\qquad \overline{DC'}^2 = \frac{c}{2}(\overline{HB}\sin A + \overline{HA}\sin B) - \frac{c^2}{4} - \overline{HA}\,.\,\overline{HB}\sin A\sin B$$

și cum din triunghiul AHB reiasă

$$\overline{HB}\sin A + \overline{HA}\sin B = c,$$

relația (4) devine

$$(5)\qquad \overline{DC'}^2 = \frac{c^2}{4} - \overline{HA}\,.\,\overline{HB}\sin A\sin B.$$

De altă parte, din triunghiurile dreptunghice DHA, DHB, deducem

$$\overline{HD} = \overline{HA}\cos B, \quad \overline{HD} = \overline{HB}\cos A,$$

care prin înmulțire ne dau

$$(6)\qquad \overline{HD}^2 = \overline{HA}\,.\,\overline{HB}\cos A\cos B.$$

Înlocuind în (3) valorile $\overline{DC'}^2$, $\overline{HD}^2$ cu valorile lor din (5) și (6), obținem

$$n^2\cos 2\gamma = \frac{c^2}{4} - \overline{HA}\,.\,\overline{HB}\sin(A-B)$$

În fine, mai înlocuind aci pe $\overline{HA}$, $\overline{HB}$ cu valorile lor din (2) și scoțând valoarea lui c^2, găsim

$$c^2 = 4[n^2\cos 2\gamma + ab\,\mathrm{cotg}\,A\,\mathrm{cotg}\,B(\sin(A-B)],$$

astfel că prima identitate este stabilită.

2. În triunghiurile AHC′, C′HB putem scri

$$\frac{c}{2} = n\cos\gamma + \overline{AH}\cos\alpha = n\cos\gamma + a\,\mathrm{cotg}A\sin B,$$

$$\frac{c}{2} = n\cos(\pi-\gamma) + \overline{BH}\cos\beta = -n\cos\gamma + b\,\mathrm{cotg}B\sin A.$$

Egalând ultimii membri, deducem

$$2n\cos\gamma = b\,\mathrm{cotg}\,B\sin A - a\,\mathrm{cotg}\,A\sin B.$$

Înmulțind această relație cu $n\sin\gamma$, avem

$$(7)\quad n^2\sin 2\gamma = b\,\mathrm{cotg}B\sin A\; n.\sin\gamma - a\,\mathrm{cotg}A\sin B.n\sin\gamma.$$

Fiindcă în triunghiurile AHC′, BHC′ putem scri

$$\frac{n}{\sin\alpha} = \frac{AH}{\sin\gamma}, \quad \frac{n}{\sin\beta} = \frac{BH}{\sin\gamma},$$

sau

$$n\sin\gamma = a\,\mathrm{cotg}\,A\cos B, \quad n\sin\gamma = b\,\mathrm{cotg}\,B\cos A,$$

rezultă că relația (7), devine

$$n^2\sin 2\gamma = ab\,\mathrm{cotA}\,\mathrm{cotgB}(\sin A\cos B - \cos A\sin B)$$

sau

$$n^2\sin 2\gamma = ab\,\mathrm{cotgA}\,\mathrm{cotgB}\sin(A-B).$$

Relația 2-a din enunț este și ea astfel stabilită.

Soluții bune date de d-nii: *Malița Mircea* (Lic. Beiuș), *Mahrenholz Johannes* (Cotbus), *Stefănescu M.* (Lt.), *Tincu C-tin* (P. T.), *Tutor Aurel* (Lic. Făgăraș) și *Wegener Eugen* (București).

Observare. D-nii *Constantinescu Ilie* (P. T) și *Enache Ion* (Lt.) relevă că relațiile din enuaț sunt stabilite în articolul autorului problemei, intitulat: *„Relații remarcabile într'un triunghiu"*, „R. M T.", Vol. XXII, No. 8, pp. 89 și 90.

Metoda folosită în acel articol a necesitat însă considerații vectoriale și calcule cu numere complexe.

Problema 2360. — *Să se rezolve ecuația*

$$40\,sp^2 + \mathrm{cotg}^2 x + Cp^2 x = 40\,cp^2 x + \mathrm{tg}^2 x + Sp^2 x.$$

LT. C-DOR C V. COSTACHESCU

Soluție. Ținând seamă că,

$$Cp\,x = \frac{1}{sp\,x}, \qquad Sp\,x = \frac{1}{cp\,x},$$

„Trig. patratică", rezultă că ecuația dată se poate scri

$$40(sp^2x - cp^2x) = \mathrm{tg}^2x + \frac{1}{cp^2x} - \mathrm{cotg}^2x - \frac{1}{sp^2x} =$$

$$\frac{sp^2x+1}{cp^2x} - \frac{cp^2x+1}{sp^2x} = \frac{sp^4x - cp^4x + sp^2x - cp^2x}{sp^2x\,cp^2x},$$

sau

$$(sp^2x - cp^2x)\left(40 - \frac{sp^2x + cp^2x + 1}{sp^2x\,cp^2x}\right) = 0.$$

Această ecuație este echivalentă cu următoarele două

$$(1)\qquad sp^2x - cp^2 = 0,$$

$$(2)\qquad sp^2x + cp^2x + 1 = 40\,sp^4x\,cp^2x.$$

Ecuația (1) putându-se scri încă

$$\mathrm{tg}^2x = 1,$$

rezultă

$$(1')\qquad x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Pentru a rezolva însă ecuația (2) suntem obligați a presupune, pe rând, arcul x situat în unul din cele 4 cadrane.

1°. *Cazul* $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, sau mai general

$$2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

În acest caz, din „*Trig. patratică*“, *avem*

(3) $$sp\,x + cp\,x = 1.$$

Ridicând această relaţie la patrat şi scăzând apoi din ea ecuaţia (2), obţinem

$$2\,sp\,x\,cp\,x - 1 = 1 - 40\,sp^2x\,cp^2x,$$

sau

$$20\,(sp\,x\,cpx)^2 + sp\,x\,cp\,x - 1 = 0.$$

De aci deducem

$$sp\,x\,cp\,x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{40} = \frac{-1 \pm 9}{40},$$

deci

(4) $$sp\,x\,cp\,x = \frac{1}{5} \text{ şi } sp\,x\,cp\,x = -\frac{1}{4}.$$

Evident, nu vom reţine de cât prima relaţie, $sp\,x$, $cp\,x$ fiind positivi în primul cadran.

Astfel avem de rezolvat sistemul

$$\begin{cases} sp\,x + cp\,x = 1 \\ sp\,x\,cp\,x = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

Rezultă că $sp\,x$, $cp\,x$ sunt rădăcinele ecuaţiei,

$$y^2 - y + \frac{1}{5} = 0, \quad \text{sau} \quad 5y^2 - 5y + 1 = 0,$$

de unde

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25-20}}{10} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{10} = \frac{5 \pm 2{,}23600\ldots}{10},$$

deci

(5) $sp\,x = 0{,}723606\ldots$, şi (6) $sp\,x = 0{,}276394\ldots$

Căutând în tabela care conţine sinusurile patratice naturale „*Trig. patratică*“, p. 15, găsim

La	0,72261 . . .	corespunde	69°
„	0,72360 . . .	„	α
„	0,72436 . . .	„	69°, 10′

Deci la 175 . . . corespunde 10′

„ „ 99 . . . „ $\alpha = \frac{990}{175} = 5'{,}4''.$

Astfel ecuaţia (5) are soluţia

(5′) $$x = 2k\pi + 69°, 5', 4'', \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

De asemeni, fiindcă ecuaţia (6) se mai poate scr

$$cp\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0{,}276394,$$

rezultă că în baza relaţiei (3), avem

$$sp\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0{,}723606$$

şi prin urmare având în vedere soluţia ecuaţiei (5), deducem

$$\frac{\pi}{2} - x = 69°, 5', 4'',$$

de unde rezultă că ecuaţia (6) are soluţia generală,

(6) $$x = 2k\pi + 20°, 54', 56''.$$

2°. Cazul $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$, sau mai general

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq x \leq (2k+1)\pi.$$

În acest caz, din „*Trig. patratică*“, avem

(7) $$sp\,x - cp\,x = 1.$$

Ridicând această relaţie la patrat şi scăzând apoi din ecuaţia (2), obţinem

$$-2\,sp\,x\,cp\,x - 1 = 1 - 40\,sp^2x\,cp^2x,$$

sau

$$20\,(sp\,x\,cp\,x)^2 - sp\,x\,cp\,x - 1 = 0.$$

De aci deducem

(8) $$sp\,x\,cp\,x = \frac{1}{4} \quad \text{şi} \quad (9) \quad sp\,x\,cp\,x = -\frac{1}{5}.$$

Ecuaţia (8) nu poate avea soluţie, căci în cadranul al 2-lea produsul $sp\,x\,cp\,x$ este negativ.

Rămâne să rezolvăm numai ecuaţia (9), care în virtutea ecuaţiei (7) devine

$$sp\,x\,(sp\,x - 1) = -\frac{1}{5},$$

sau

$$5\,sp^2x - 5\,sp\,x + 1 = 0,$$

deci

$$sp\,x = \frac{5 \pm \sqrt{25-20}}{10} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{10} = \frac{5 \pm 2{,}23606}{10}.$$

De aci rezultă

(10) $sp\,x = 0{,}723606$ şi (11) $sp\,x = 0{,}276304.$

Vedem că aceste ecuaţii (10) şi (11) sunt identice cu ecuaţiile (5) şi (6), numai că aci arcul x

este în al 2-lea cadran. Dar arcele din al 2-lea cadran care au acelaşi sinus patratic cu acelea din primul cadran, sunt suplimentare lor, de unde rezultă, având în vedere soluţiile (5′) şi (6′), că ecuaţiile (10) au următoarele soluţii

(10′) $x=2k\pi+(180^0-69^0,5',4'')=2k\pi+110^0,54',56''$

(11′) $x=2k\pi+(180^0-20^0,55',56'')=2k\pi+159^0,5',4''$,

$$k=0,1,2,\ldots).$$

3°. *Cazul* $\pi\leq x\leq\frac{3\pi}{2}$, sau mai general

$$(2k+1)\pi\leq x\leq(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}\cdot$$

În acest caz din „*Trig. patratică*“, avem

(12) $$sp\,x+cp\,x=-1.$$

Ridicând la patrat şi scăzând apoi ecuaţia (2), obţinem

$$20\,(sp\,x\,cp\,x)^2+sp\,x\,cp\,x-1=0,$$

deci

(13) $sp\,x\,cp\,x=\frac{1}{5}$ şi (14) $sp\,x\,cp\,x=-\frac{1}{4}\cdot$

Ecuaţia (14) n'are soluţie, fiindcă în cadranul al 3-lea $sp\,x\,cp\,x>0$.

Ecuaţia (13), în virtutea ecuaţiei (12) devine

$$5\,sp^2x+5\,sp\,x+1=0,$$

de unde

$$sp\,x=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{10}=\frac{-5\pm2,23606}{10}$$

şi prin urmare

$sp\,x=-0,276394$ şi $sp\,x=-0,723606$.

Dar x fiind în cadranul al 3-lea putem scri respectiv

(15) $sp\,(x-180^0)=-sp\,x=0,276394$),

(16) $sp\,(x-180^0)=sp\,x=0,723606$.

Acum, arcul $x-180^0$ este în primul cadran şi fiindcă ecuaţiile (15) şi (16) sunt analoage cu ecuaţiile (6) şi (5) din *primul caz*, rezultă conform soluţiilor (6′) şi (5′),

(13′) $x=2k\pi+180^0+20^0,55',56''=2k\pi+200^0,54',56''$

(14′) $x=2k\pi+180^0+69^0,5',4''=2k\pi+249^0,5',4''$,

$$(k=0,1,2,\ldots).$$

4°. *Cazul* $\frac{3\pi}{2}\leq x\leq2\pi$, sau mai general

$$2k\pi+\frac{3\pi}{2}\leq x\leq(2k+2)\pi.$$

În acest caz, din „*Trig. patratică*“, avem

(17) $$sp\,x-cp\,x=-1.$$

Ridicând la patrat şi scăzând ecuaţia (2), obţinem

$$20\,(sp\,x\,cp\,x)^2-sp\,x\,cp\,x-1=0,$$

deci

(18) $sp\,x\,cp\,x=\frac{1}{4}$, (19) $sp\,x\,cp\,x=\frac{1}{5}\cdot$

Ecuaţia (18) n'are soluţie, fiindcă în cadranul al 4-lea $sp\,x\,cp\,x<0$.

Ecuaţia (19), în virtutea ecuaţiei (17), devine

$$5\,sp^2x+5\,sp\,x+1=0,$$

de unde

$$sp\,x=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{10}=\frac{-5+2,23506}{10}$$

şi prin urmare

(20) $sp\,x=-0,276394$, (21) $sp\,x=-0,723606$.

Dar x fiind în cadranul al 4-lea, $x-180^0$ este în cadranul ale 2-lea şi putem scri respectiv,

(22) $$sp\,(x-180^0)=-sp\,x=0,276394,$$

(23) $$sp\,(x-180^0)=-sp\,x=0,723606.$$

Acum arcul $x-180^0$ fiind în cadranul al 2-lea, observăm că ecuaţiile (22) şi (23) sunt analoage respectiv ecuaţiilor (11) şi (10) din *cazul 2*, atunci rezultă conform soluţiilor (11′) şi (10′),

(20′) $x=2k\pi+180^0+159^0,5',4''=2k\pi+339^0,5',4''$,

(21′) $x=2k\pi+180^0+110^0,55',56''=2k\pi+290^0,54',56''$,

$$(k=0,1,2,\ldots).$$

În total, ecuaţia dată are următoarele 12 soluţii, abstracţie făcând de un multiplu de 2π:

(24) $20^0,54',56''$; 45^0; $69^0,5',4''$; $110^0,54',56''$; 135^0; $159^0,5',4''$; $200^0,54',56''$; 225^0; $249^0,5',4''$; $290^0,54'56''$; 315^0; $339^0,5',4''$.

Soluţia este redactată în mare parte după aceea a autorului problemei, care a mai dat şi o altă soluţie interesantă înlocuind toate funcţiile patratice cu valorile lor în funcţie de tangentă.

Soluţii cu totul parţiale date de d-nii: *Giurconiu Mihai* (P. T.), *Serengău Mihai* (P. T) şi *Tincu C-tin* (P. T.).

D-l *Novac I.* (Brăila) a dat o soluţie înlocuind $sp\,x$, $cp\,x$ prin $tg\,x$.

Observare importantă a Redacției. Ecuația

$$(sp^2x - cp^2x)\left(40 - \frac{sp^2x + cp^2x + 1}{sp^2x\, cp^2x}\right) = 0,$$

la care am redus ecuația dată, observăm că este de forma

25) $$f(sp^2x,\ cp^2x) = 0,$$

caz tratat în „*Trig. patratică*“, p. 136.

În acest caz, nu mai este nevoie să considerăm cele 4 cazuri tratate, fiindcă iată ce aflăm în „*Trig. patratică*“ la locul citat:

. . . „odată ce am găsit un arc α în primul cadran, soluție a ecuației (25), toate arcele de forma

$$x = k\pi \pm \alpha, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

sunt soluții a ecuației (25)“.

Acest fapt se confirmă de altfel și prin cele 12 soluții (24). În felul acesta am fi simplificat mult expunerea de mai sus.

PROBLEME PROPUSE

2440. — Să se găsească un număr de patru cifre multiplu de 3, știind că patratul său se termină printr'un număr de 4 cifre de forma $a\,b\,a\,b$, multiplu de 9.

PETRE TEODORESCU

2441. — În orice sistem de numerație este cel puțin un patrat de patru cifre $a\,b\,c\,d$, unde numărul de două cifre $a\,b$ și $c\,d$ sunt consecutive.

Câte sunt în sistemul duodecimal?

V. THÉBAULT

2442. — Să se rezolve sistemul

$$\frac{b(ax + by) + c(ax + cz) - bcyz}{ax} =$$

$$\frac{c(cz + by) + a(ax + by) - cazx}{by} =$$

$$\frac{a(ax + cz) + b(by + cz) - abxy}{cz} = ax + by + cz$$

IOAN FILIMON

2443. — Să se stabilească identitatea

$$i \log x = \operatorname{arc\,tg}\, i\frac{x^2\varphi(x) - 1}{x^2\varphi(x) + 1} - \operatorname{arc\,tg}\, i\frac{\varphi(x) - 1}{\varphi(x) + 1},$$

unde $i = \sqrt{-1}$.

V. ALACI

2444. — Fie A un punct fix pe tangenta în punctul fix B al cercului (O). Se construește paralelogramul A L M N de diagonală AM și cu laturile paralele la B M și la tangenta în M la (O). Să se găsească locurile punctelor L și N.

G-L GH. BUICLIU

2445. — Fie A un punct de intersecție a două cercuri O și O′. Laturile unui unghiu de mărime constantă cu vârful în A întâlnesc cercurile în M și M′.

1°. Se cere locul lui P, un punct luat pe MM′, care împarte acest segment într'un raport dat. Locul centrului de greutate al triunghiului MAM′.

2°. Dreptele MO și M′O′ se întâlnesc în I. Bisectoarea unghiului MIM′ trece printr'un punct fix.

I. LOZICIU

2446. — Să se arate că într'un triunghiu oarecare, avem relațiile

$$\left(\frac{S}{r} + c\cos\frac{B}{2}\right)\cos\frac{C}{2} + 2c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{4}\cos\left(A + \frac{3B + 2C}{4}\right) = b\cos\frac{C}{2}$$

$$\cos\frac{B}{4}\cos\frac{C}{2}\left(b + 2c\cos\frac{B}{2}\right) = \left(p + c\cos\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{4} - \frac{C}{2}\right).$$

MIHAI GIURCONIU

2447. — În orice triunghiu avem

$$\left(\frac{r_a}{r}\right)^2 + \left(\frac{r}{r_a}\right)^2 = 2(\sec^2 2\alpha + \operatorname{tg}^2 2\alpha),$$

α fiind unghiul asociat [1].

LT. C-DOR C. V. COSTACHESCU

[1]) Dacă avem un triunghiu oarecare ABC și construim apoi un triunghiu dreptunghic de catete a, $b+c$, unghiul α opus catetei se numește unghiu asociat, „Trig. patratică“.

Erată. În problema 2362 din No trecut, relația $3a.b = c$, trebuie înlocuită prin $3a.b = 2c$.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Adam Mircea (N.); *Anastasescu Decebal* (2375, 2387, 2390, 2401, 2403, 2404, 2405, 2406, 2409, 2419, 2424, 2430); *Bal Lascu* (N.); *Balanişcu Chirică* (2338, 2350, 2405, 2429); *Balăuţă Mihai* (2261, 2276, 2287, 2302, 2395, 2405, 2409, 2430); *Bonea Anton* (2413, 2424, 2435); *Bogza Mihai* (2347, 2389, 2396, 2400, 2405, 2406, 2413, 2416, 2427, 2431); *Crăciunescu Victor* (2405, 2406, 2413, 2419, 2424, 2435, 2437); *Fleşeriu Eugen* (2408, 2413, 2424, 2437, 2438); *Gancea C-tin* (2405); *Georgian Nicolae* (2419); *Guttman Tiberiu* (2261, 2284, 2390); *Hurezeanu Romulus* (2435); *Macavei Eugen* (2389, 2390, 2396, 2399, 2413, 2419); *Mâncescu Ion* (2407, 2409, 2410, 2417, 2424, 2435); *Novac Ioan* (2137, 2143, 2168, 2178, 2180, 2183, 2189, 2193, 2202, 2205, 2234, 2249, 2275, 2281, 2331, 2418, 2419, 2420, 2423, 2424, 2427, 2429, 2430, 2431); *Pali Sergiu* (P., 2416, 2419, 2424, 2429, 2432); *Pisanca Ionel* (2345, 2429); *Pop Petre* (2413); *Poenaru Gheorghe* (2427, 2435); *Popa Vasile* (2234, 2279, 2372, 2417, 2424, 2427, 2429, 2430, 2431, 2432); *Puşcaşu Silviu* (2118, 2418, 2427, 2433, 2435); *Râmboiu Septimiu* (2403, 2405, 2406, 2409, 2410, 2413, 2418, 2419, 2429, 2430); *Sasu Ioan* (2330, 2346, 2353, 2399, 2405, 2409); *Scoridor Gh.* (2403, 2404, 2405, 2406, 2409, 2411); *Şerengău Mihai* (2375, 2387, 2417), 2418, 2419, 2424, 2429); *Stanciu Olimpiu* (2387, 2417, 2419, 2424, 2429); *Stanciu M. Valeriu* (P., 2416, 2423); *Teodorescu Petre* (P., 1843, 2052, 2098, 2168, 2178, 2362, 2427, 2428, 2429, 2430, 2435, 2436, 2438, 2439); *Tucă Marcu* (P., 2435, 2437).

INFORMAŢIUNI

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, pentru a fi luate în consideraţie, trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Rugăm pe corespondenţii noştrii ca problemele propuse să fie însoţite de soluţiile corespunzătoare.

Legându-se colecţiileR. M. T., anii II-XXV, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 1200 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II—XXV, cu preţul de lei 8000 volumul şi se trimet la cerere.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

ANUL XXVI. SEPTEMBRIE 1946 No. 7.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIŞOARA

BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITATEA
SIBIU

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREŢUL UNUI NUMAR 1000 LEI PREŢUL ABONAMENTULUI 8000 LEI PE AN.
PREŢUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 20.000 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **V. ALACI:** FUNCTII TRIGONOMETRICE INVERSE SI FUNCTII LOGARITMICE CARE AU ACEIASI DERIVATA (URMARE).
2. NOTE MATEMATICE 18, 19, 20.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 2212, 2250, 2363, 2367, 2380.
5. PROBLEME PROPUSE: 2448 - 2455.
6. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timişoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Pentru nouii abonaţi, costul abonamentului pentru anul XXVI (15 Martie 1946 — 15 Februarie 1947) este de 8000 (opt mii) lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale, vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Politehnica Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Politehnica Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Politehnica Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXVI, de 8000 (opt mii) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXV inclusiv, broşate, 8000 lei fiecare.

ANUL XXVI — No. 7. TIMISOARA, SEPTEMBRIE 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 1000 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 8000 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Politehnica Timișoara.

FUNCȚII TRIGONOMETRICE INVERSE ȘI FUNCȚII LOGARITMICE CARE AU ACEIAȘI DERIVATĂ

DE

V. ALACI

(urmare)

Problema 5-a. *Se dau funcțiile*

$$(25)\qquad y=\arccos Y,\quad z=\frac{1}{2i}\lg Z,\quad (i=\sqrt{-1}),$$

unde Y *și* Z *depind de variabila* x. *Cunoscând pe* Z, *să se determine* Y *astfel ca funcțiile din* (25) *să aibă aceiași derivată.*

Soluția 1-a. Am putea trata această problemă prin metoda folosită în *problemele 1-a și a 3-a.* Preferim însă să folosim următorul artificiu, observând că relația $y=\arccos Y$ este echivalentă cu

$$(26)\qquad y=\arcsin\left(\pm\sqrt{1-Y^2}\right)=\arcsin Y_1,$$

ceeace ne permite a reduce problema noastră la *problema* 3-*a,* adică la *determinarea funcției* Z, *când se cunoaște* Y_1, *astfel ca funcțiile*

$$y=\arcsin Y_1,\quad z=\frac{1}{2i}\lg Z,\qquad (i=\sqrt{-1})$$

să aibă aceiași derivată,

Dar în acest caz, formula (II) din *problema 3 a,* ne dă

$$Z=\left[A\left(iY_1\pm\sqrt{1-Y_1^2}\right)\right]^2.$$

Înlocuind pe Y_1 cu valoarea sa, care rezultă din (26), obținem

$$Z=\left[A\left(\pm i\sqrt{1-Y^2}+Y\right)\right]^2,$$

sau

$$(III)\qquad \boxed{Z=\left[A\left(Y\pm\sqrt{Y^2-1}\right)\right]^2},\qquad (A\neq 0).$$

Prin urmare putem enunța: *Funcțiile:*

$$(27)\qquad y=\arccos Y,\quad z=\frac{1}{i}\lg A\left(Y\pm\sqrt{Y^2-1}\right),$$

$$(i=\sqrt{-1}\ \text{și}\ A\neq 0),$$

au aceiași derivată.

Soluția 2-a. Considerăm identitatea

$$\frac{1}{\mp\sqrt{1-Y^2}}=\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{\mp\sqrt{Y^2-1}},\quad (i=\sqrt{-1}),$$

unde Y este o funcție de variabila x.

Înmulțim această relație cu $Y'dx$ și apoi o integrăm. Observând că în ambii membri avem integrale imediate, obținem

$$\arccos Y=\frac{1}{i}\lg\left(Y\mp\sqrt{Y^2-1}\right)+\frac{1}{i}\lg A$$

$$=\frac{1}{i}\lg A\left(Y\mp\sqrt{Y^2-1}\right)=\frac{1}{2i}\lg Z,$$

deci

$$Z=\left[A\left(Y\mp\sqrt{Y^2-1}\right)\right]^2,$$

care este tocmai formula (III).

Aplicații. 1°. Pentru $Y=\sqrt{x^2+1}$ și A=1, relațiile (27) ne permit a afirma că: *Funcțiile*

$$(28)\quad y=\arccos\sqrt{x^2+1},\quad z=\frac{1}{i}\lg\left(\sqrt{x^2+1}\pm x\right),$$

$$(i=\sqrt{-1}),$$

au aceiași derivată.

2°. Pentru $Y=\frac{x^8+1}{2x^4}$ și A=1, relațiile (27) ne permit a afirma că: *Funcțiile*

$$(29)\qquad y=\arccos\frac{x^8+1}{2x^4},\quad z=\frac{4}{i}\lg x,$$

au aceiași derivată.

Problema 6-a. *Se dau funcțiile*

$$(30)\qquad y=\arccos Y,\quad z=\frac{1}{2i}\lg Z,\quad (i=\sqrt{-1}),$$

unde Y *şi* Z *depind de variabila* x. *Cunoscând pe* Z, *să se determine* Y *astfel ca funcţiile din* (30) *să aibă aceiaşi derivată.*

Soluţie. Fiindcă prima relaţie din (30) se mai poate scri

(31) $y = \arcsin\left(\pm\sqrt{1-Y^2}\right) = \arcsin Y_1$,

rezultă conform formulei (II_1) din *problema 4-a*

$$Y_1 = \pm\frac{Z-A}{2i\sqrt{AZ}}.$$

Ţinând seamă de (31), deducem

$$\pm\sqrt{1-Y^2} = \pm\frac{Z-A}{2i\sqrt{AZ}},$$

deci

$$1-Y^2 = -\frac{(Z-A)^2}{4AZ}.$$

De aci reiasă

(III_1) $$\boxed{Y = \pm\frac{Z+A}{2\sqrt{AZ}}}.$$

Putem deci enunţa: *Funcţiile*

(32) $y = \arccos\left(\pm\frac{Z+A}{2\sqrt{AZ}}\right)$, $z = \frac{1}{2i}\lg Z$, $(i=\sqrt{-1})$

au aceiaşi derivată. Se va lua semnul potrivit.

Aplicaţii: 1°. Pentru $Z = \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2$ şi $A=1$, relaţiile (32) ne permit a afirma că: *Funcţiile*

(33) $y = \arccos\left(\pm\frac{x^4+1}{x^4-1}\right)$, $z = \frac{1}{i}\lg\frac{x^2+1}{x^2-1}$, $(i=\sqrt{-1})$

au aceiaşi derivată.

2° Pentru $Z = \operatorname{tg}^2 x$ şi $A=1$, relaţiile (32) ne permit a afirma că: *Funcţiile*

(34) $y = \arccos\left(\pm\frac{1}{\sin 2x}\right)$, $z = \frac{1}{i}\lg\operatorname{tg} x$, $(i=\sqrt{-1})$

cu aceiaşi derivată.

II.

Problemele tratate până aci sunt suficiente a pune în evidenţă *o metodă simplă pentru a construi oricâte funcţii trigonometrice inverse şi funcţii logaritmice corespunzătoare, care să aibă aceiaşi derivată.*

Din ea se desprinde, cum vom arăta, şi *o nouă metodă — fără a folosi operaţia de derivare — care să ne permită a recunoaşte dacă o funcţie trigonometrică inversă şi alta logaritmică, de felul celor studiate, au sau nu aceiaşi derivată.*

În acest scop să formăm întâi următorul tablou rezumativ, pe care apoi îl vom interpreta.

(T)

y	z	Dacă este cunoscută funcţia Y, atunci:	Dacă este cunoscută funcţia Z, atunci:
arc tg Y	$\frac{1}{2i}\lg Z$	$Z = A\frac{1+iY}{1-iY}$	$Y = i\frac{A-Z}{A+Z}$
arc sin Y	$\frac{1}{2i}\lg Z$	$Z = \left[A\left(iY \pm \sqrt{1-Y^2}\right)\right]^2$	$Y = \pm\frac{Z-A}{2i\sqrt{AZ}}$
arc cos Y	$\frac{1}{2i}\lg Z$	$Z = \left[A\left(Y \pm \sqrt{Y^2-1}\right)\right]^2$	$Y = \pm\frac{Z+A}{2\sqrt{AZ}}$
Observare: $i=\sqrt{-1}$, iar A o constantă reală sau imaginară, $\neq 0$.			

Din acest tablou (T) reiasă următoarele concluzii:

1°. *Dacă se dau, o funcţie trigonometrică inversă* y *şi o funcţie logaritmică* z, *care figurează într'o linie a tabloului* (T) *şi dacă voim ca ele să aibă aceiaşi derivată, atunci luând pentru* Y *o funcţie oarecare de variabila* x, *găsim în tablou, în aceiaşi linie, valoarea lui* Z; *sau dacă luăm pentru* Z *o funcţie oarecare de variabla* x, *în aceiaşi linie, găsim valoarea lui* Y *corespunzătoare.*

În felul acesta, vedem cum se pot construi cu uşurinţă oricâte perechi de funcţii y şi z care să aibă aceiaşi derivată. Aplicaţiile ce însoţesc problemele tratate, ilustrează afirmările noastre.

2°. Dacă ni se dau două funcţii y şi z, una tri-

gonometrică inversă şi alta logaritmică de felul celor trecute într'o linie din tabloul (T), adică dacă se dau Y şi Z în funcţie de variabila x, atunci, *pentru ca să putem afirma dacă y şi z au sau n'au aceiaşi derivată — fără a folosi operaţia de derivare — vom scri una dintre relaţiile între* Y *şi* Z *ce figurează în tablou, în aceiaşi linie şi dacă această relaţie rezolvată în raport cu* A *ne va da o valoare constantă reală sau imaginară, concluzia este că cele două funcţii y şi z au aceiaşi derivată. În caz că deducem pentru* A *o funcţie de x, rezultă că funcţiile date n'au aceiaşi derivată.*

Iată şi câteva probleme soluţionate prin această metodă:

Problema 7-a. *Să se arate că funcţiile*

$$(35)\quad y=\operatorname{arc\,tg}\frac{2ix}{x^2-4},\quad z=\frac{1}{2i}\lg\frac{x^2-2x-4}{x^2+2x-4},\quad (i=\sqrt{-1})$$

au aceiaşi derivată.

Soluţie. Observăm că în tabloul (T), în prima linie, avem funcţii de felul celor de mai sus. Vom scri, prin urmare, una dintre cele două relaţii (prima de exemplu) din aceiaşi linie, înlocuind pe Y şi Z cu valorile lor, avem

$$\frac{x^2-2x-4}{x^2+2x-4}=A\frac{1+i\frac{2ix}{x^2-4}}{1-i\frac{2ix}{x^2-4}}=A\frac{x^2-2x-4}{x^2+2x-4}.$$

De aci rezultă imediat $A=1$, deci constant.

Concluzia este că funcţiile (35) au aceiaşi derivată.

Problema 8-a. *Să se arate că funcţiile*

$$(36)\quad y=\operatorname{arc\,tg}\,i\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2,\quad z=\frac{1}{2i}\lg\frac{x}{x^2+4},\quad (i=\sqrt{-1})$$

au aceiaşi derivată.

Soluţie. Astfel de funcţii figurând în prima linie din tabloul (T), relaţia corespunzătoare de acolo dintre Y şi Z ne permite a scri

$$\frac{x}{x^2+4}=A\frac{1-\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2}{1+\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2}=A\frac{8x}{2(x^2+4)}.$$

De aci rezultă imediat $A=\frac{1}{4}$, deci constant.

Concluzia este că funcţiile (36) au aceiaşi derivată.

Problema 9-a. *Să se arate că funcţiile*

$$(37)\quad y=\arcsin\frac{x^2+1}{x^2-1},\quad z=\frac{1}{i}\lg\frac{i(x\pm1)}{2(x\mp1)},\quad (i=\sqrt{-1})$$

au aceiaşi derivată.

Soluţie. Vom scri întâi pe z sub forma

$$z=\frac{1}{2i}\lg\left[\frac{i(x\pm1)}{2(x\mp1)}\right]^2,$$

pentru ca funcţiile y şi z să fie de forma celor ce figurează în tabloul (T).

Aceste funcţii y şi z figurând acum în tablou, în linia 2-a, scrim prima relaţie dintre Y şi Z corespunzătoare şi avem

$$\left[\frac{i(x\pm1)}{2(x\mp1)}\right]^2=\left[A\left(i\frac{x^2+1}{x^2-1}\pm\sqrt{1-\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2}\right)\right]^2,$$

sau

$$\frac{i(x\pm1)}{2(x\mp1)}=A\frac{ix+i\pm2ix}{x^2-1}=Ai\frac{(x\pm1)^2}{x^2-1}=A\cdot\frac{i(x\pm1)}{(x\mp1)}.$$

De aci deducem imediat $A=\frac{1}{2}$, deci constant.

Concluzia este că funcţiile (37) au aceiaşi derivată.

Problema 10-a. *Să se arate că funcţiile*

$$(38)\quad y=\arcsin\frac{1+x^4}{1-x^4},\quad z=\frac{1}{i}\lg\frac{x^2-1}{x^2+1},\quad (i=\sqrt{-1}),$$

au aceiaşi derivată.

Soluţie. Scrim întâi pe z sub forma

$$z=\frac{1}{2i}\lg\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2,$$

pentru ca y şi z să fie de forma celor ce figurează în tabloul (T).

Aceste funcţii y şi z figurând în tablou, în linia 2-a, relaţia dintre Y şi Z corespunzătoare, ne dă luând semnul —, de exemplu, înaintea radicalului,

$$\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2=A^2\left[i\frac{1+x^4}{1-x^4}-\sqrt{1-\left(\frac{1+x^4}{1-x^4}\right)^2}\right]^2,$$

sau

$$\pm\frac{x^2-1}{x^2+1}=A\frac{i+ix^4-2ix^2}{1-x^4}=-Ai\frac{(x^2-1)^2}{x^4-1}$$

$$=-Ai\frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

De aci deducem imediat, $A=\mp\frac{1}{i}$, deci constant.

Concluzia este că funcţiile (38) au aceiaşi derivată.

Problema 11-a. *Să se arate că funcţiile*

(39) $y=\arccos\frac{1}{\sin 2x}$, $z=\frac{1}{i}\lg\operatorname{tg} x$, $(i=\sqrt{-1})$,

au aceiaşi derivată.

Soluţie. Scriind pe z sub forma

$$z=\frac{1}{2i}\lg\operatorname{tg}^2 x,$$

funcţiile y şi z se găsesc în tabloul (T), în linia 3-a, astfel că relaţia între Y şi Z corespunzătoare, ne dă luând semnul — înaintea radicalului

$$\operatorname{tg}^2 x=A^2\left(\frac{1}{\sin 2x}-\sqrt{\frac{1}{\sin^2 2x}-1}\right)^2,$$

sau

$$\pm\operatorname{tg} x=A\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}=A\frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x}=A\operatorname{tg} x,$$

de unde rezultă $A=\pm 1$, deci constant.

Concluzia este că funcţiile (39) au aceiaşi derivată.

III.

Chestiuni conexe.

1. Aruncând o privire asupra tabloului (T), vedem că în coloana 2-a, avem funcţia

(40) $$z=\frac{1}{2i}\lg Z.$$

Dacă luăm prin urmare, (41) $Z=e^{2ix}$, relaţia (40) ne dă

$$z=\frac{1}{2i}\lg e^{2ix}=x,$$

a cărei derivată este 1.

Rezultă atunci că şi funcţiile arc tg Y, arc sin Y, arc cos Y *corespunzătoare — în care înlocuim* Y *cu valorile lor din ultima coloană — vor avea şi ele derivata egală cu 1.*

Aceste funcţii, conform relaţiilor corespunzătoare din coloana a 3-a, devin respectiv, în baza relaţiei (41)

(42) $$\operatorname{arc\,tg} i\frac{A-e^{2ix}}{A+e^{2ix}},\quad \arcsin\left(\pm\frac{e^{2ix}-A}{2i\sqrt{A}e^{ix}}\right),$$
$$\arccos\left(\pm\frac{e^{2ix}+A}{2\sqrt{A}e^{ix}}\right),$$

unde $i=\sqrt{-1}$, iar A este o constantă reală, sau imaginară $\neq 0$.

Prin urmare, rezultatul foarte important pe care îl relevăm, este că funcţiile (42) *au, fiecare, derivata egală cu 1.*

Rezultă atunci că x diferă de funcţiile (42) printr'o constantă şi putem scri

$$x+C=\operatorname{arc\,tg} i\frac{A-e^{2ix}}{A+e^{2ix}},$$

$$x+C_1=\arcsin\left(\pm\frac{e^{2ix}-A}{2i\sqrt{A}e^{ix}}\right),$$

$$x+C_2=\arccos\left(\pm\frac{e^{2ix}+A}{2\sqrt{A}e^{ix}}\right).$$

Rămâne să determinăm constantele, pentru ca să existe aceste egalităţi. În adevăr. Făcând $x=0$, găsim respectiv

$$C=\operatorname{arc\,tg} i\frac{A-1}{A+1},\quad C_1=\arcsin\left(\pm\frac{1-A}{2i\sqrt{A}}\right),$$
$$C_2=\arccos\left(\pm\frac{1+A}{2\sqrt{A}}\right).$$

Obţinem astfel următoarele identităţi remarcabile,

(43)
$$\begin{aligned}
x&=\operatorname{arc\,tg} i\frac{A-e^{2ix}}{A+e^{2ix}}-\operatorname{arc\,tg} i\frac{A-1}{A+1}\\
x&=\arcsin\left(\pm\frac{e^{2ix}-A}{2i\sqrt{A}e^{ix}}\right)-\arcsin\left(\pm\frac{1-A}{2i\sqrt{A}}\right),\\
x&=\arccos\left(\pm\frac{e^{2ix}+A}{2\sqrt{A}e^{ix}}\right)-\arccos\left(\pm\frac{1+A}{2\sqrt{A}}\right)
\end{aligned}$$

unde $i=\sqrt{-1}$, *iar* A *este o constantă oarecare reală sau imaginară,* $\neq 0$.

2. *Mai general.* Putem lua în (40), în locul lui Z, funcţia

$$Z=e^{2if(x)},$$

unde $f(x)$ poate fi un polinom sau o funcţie oarecare de variabila x.

Rezultă, analog ca mai sus, că funcţiile transcendente,

(44) $$\operatorname{arc\,tg} i\frac{A-e^{2if(x)}}{A+e^{2if(x)}},\quad \arcsin\left(\pm\frac{e^{2if(x)}-A}{2i\sqrt{A}e^{if(x)}}\right),$$
$$\arccos\left(\pm\frac{e^{2if(x)}+A}{2\sqrt{A}e^{if(x)}}\right),$$

au aceiaşi derivată ca şi funcţia $f(x)$.

De aci tragem concluzia, că fiecare din funcţiile (44) şi funcţia $f(x)$ diferă printr'o constantă. De-

terminând constanta, ca în cazul precedent, *obținem mai general următoarele identități remarcabile, anume*

$$(45)\quad \boxed{\begin{aligned} f(x)&=\operatorname{arc\,tg} i\frac{A-e^{2if(x)}}{A+e^{2if(x)}}-\operatorname{arc\,tg} i\frac{A-1}{A+1}\\ f(x)&=\operatorname{arc\sin}\left(\pm\frac{e^{2if(x)}-A}{2i\sqrt{A}\,e^{if(x)}}\right)-\operatorname{arc\sin}\left(\pm\frac{1-A}{2i\sqrt{A}}\right),\\ f(x)&=\arccos\left(\pm\frac{e^{2if(x)}+A}{2\sqrt{A}\,e^{if(x)}}\right)-\arccos\left(\pm\frac{1+A}{2\sqrt{A}}\right)\end{aligned}}$$

unde $i=\sqrt{-1}$, *iar* A *este o constantă reală, sau imaginară,* $\neq 0$.

3. Identitățile (45) ce le-am stabilit atât de simplu prin considerațiile din acest articol, se pot stabili și pe cale directă.

Să tratăm de exemplu următoarea problemă:

Problema 12-a. *Să se stabilească identitatea*

$$(46)\quad \operatorname{arc\,tg} i\frac{A-e^{2iX}}{A+e^{2iX}}-\operatorname{arc\,tg} i\frac{A-1}{A+1}=X,\quad (i=\sqrt{-1}).$$

Soluție. Notând cu α primul membru și aplicând apoi tangenta, obținem

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{i\dfrac{A-e^{2iX}}{A+e^{2iX}}-i\dfrac{A-1}{A+1}}{1-\dfrac{(A-e^{2iX})(A-1)}{(A+e^{2iX})(A+1)}}$$

$$=i\frac{(A-e^{2iX})(A+1)-(A+e^{2iX})(A-1)}{(A+e^{2iX})(A+1)-(A-e^{2iX})(A-1)},$$

sau

$$(47)\quad \operatorname{tg}\alpha=i\frac{-2Ae^{2iX}+2A}{2Ae^{2iX}+2A}=-i\frac{e^{2iX}-1}{e^{2iX}+1}=\frac{1}{i}\frac{e^{iX}-e^{-iX}}{e^{iX}+e^{-iX}}.$$

Ținând seamă de formulele lui *Euler*, anume

$$e^{iX}-e^{-iX}=2i\sin X,\quad e^{iX}+e^{-iX}=2\cos X,$$

relația (47) devine

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}X,$$

deci făcând abstracție de un multiplu de π, rezultă

$$\alpha=X.$$

Identitatea (46) este astfel stabilită.

4. Identitățile (45) pot sugera încă formarea și a altor multe alte identități remarcabile, analoage, de exemplu:

Înlocuind în prima identitate (45) pe $f(x)$, întâi prin x^2, apoi prin x și scăzând egalitățile obținute, *obținem următoarea identitate remarcabilă,*

$$(48)\quad x(x-1)=\operatorname{arc\,tg} i\frac{A-e^{2ix^2}}{A+e^{2ix^2}}-\operatorname{arc\,tg} i\frac{A-e^{2ix}}{A+e^{2ix}},$$

identitate care se poate stabili și pe cale directă.

5. Observare importantă. Fiindcă identitățile (45), sau acelea deduse din ele, cum este identitatea (48), sunt idependente de A, rezultă că putem lua în locul lui A chiar o funcție oarecare de variabila x, $A=\varphi(x)$. Astfel, dacă în particular luăm pentru $\varphi(x)$ în cele trei identități (45), respectiv $x+e^{2if(x)}$, $-x^2$, $e^{2if(x)}$, *obținem următoarele identități interesante.*

$$(49)\quad \boxed{\begin{aligned} f(x)&=\operatorname{arc\,tg}\frac{ix}{x+2e^{2if(x)}}-\operatorname{arc\,tg} i\frac{x+e^{2if(x)}-1}{x+e^{2if(x)}+1}\\ f(x)&=\operatorname{arc\sin}\left(\mp\frac{e^{2if(x)}+x^2}{2xe^{if(x)}}\right)-\operatorname{arc\sin}\left(\mp\frac{x^2+1}{2x}\right),\\ f(x)&=k\pi-\arccos\left(\pm\frac{1+e^{2if(x)}}{2e^{if(x)}}\right)\end{aligned}}$$

6. În fine, terminăm acest articol cu încă câteva identități remarcabile deduse din identitățile (45). În adevăr, dacă în (45) luăm

$$f(x)=i\lg x,\quad A=\varphi(x)=x^2$$

și observăm că

$$e^{2if(x)}=e^{2i^2\lg x}=e^{-\lg x^2}=\frac{1}{x^2},$$

obținem identitățile remarcabile

$$(50)\quad \boxed{\begin{aligned} i\lg x&=\operatorname{arc\,tg} i\frac{x^4-1}{x^4+1}-\operatorname{arc\,tg} i\frac{x^2-1}{x^2+1}\\ i\lg x&=\operatorname{arc\sin}\left(\pm\frac{1-x^4}{2ix^2}\right)-\operatorname{arc\sin}\left(\pm\frac{1-x^2}{2ix}\right),\\ i\lg x&=\arccos\left(\pm\frac{1+x^4}{2x^2}\right)-\arccos\left(\pm\frac{1+x^2}{2x}\right)\end{aligned}}$$

7. Vom propune unele din aceste identități și altele analoage ca probleme propuse, cerând soluții directe. Poate că asupra acestor chestiuni din prezentul articol să mai revenim.

NOTE MATEMATICE

18. — *Asupra divergenței seriei armonice.* Divergența seriei armonice se mai poate stabili în următorul fel:

Considerăm seria armonică

$$S=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

și însumăm doi câte doi, termenii săi, avem

$$S=\frac{3}{1.2}+\frac{7}{3.4}+\frac{11}{5.6}+\cdots$$

Să mai considerăm încă seria cunoscută

$$S_1=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\cdots,$$

a cărei sumă, obținută prin descompunerea în fracțiuni simple a termenului său general $\frac{1}{n(n+1)}$, este $S_1=1$.

Scăzând termen cu termen aceste două serii, se obține

$$S-S_1=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$$
$$S-1=S$$

rezultat posibil numai în cazul când $S=\infty$.

VIRGIL GHITESCU

19. — *Asupra notei 14 din „R. M. T.", No. 5, Iulie 1946,* 1. In sus numita notă se reia problema 426 din Culegerea de Probleme și Exerciții de d-l prof. *Th. Angheluță* (pag.214): *„Un punct material greu este aruncat din punctul* O *cu o viteză* v_0. *Să se determine unghiul* α *al acestei viteze cu orizontala, astfel ca distanța dela punctul* O *la punctul de întâlnire a mobilului cu planul orizontal, la distanța* h, *dedesubtul punctului* O *să fie maximă" găsindu-se drept maxim al distanței, expresia*

$$\sqrt{h^2+\left(h+\frac{v_0^2}{g}\right)^2}$$

și unghiul α *dat de relația* $\cos 2\alpha=\frac{2gh}{v_0^2}$, *în loc de maxim al distanței* $\left(h+\frac{v_0^2}{g}\right)$ *și unghiul* α *dat de relația* $\cos 2\alpha=\frac{gh}{gh+v_0^2}$, *indicate în susnumita Culegere de probleme.*

Examinând mai cu atenție problema de mai sus, se constată că maximum distanței este

(a) $$\sqrt{h^2+\frac{v_0^2}{g^2}(v_0^2+2gh)},$$

iar unghiul α este dat de relația

(b) $$\cos 2\alpha=\frac{gh}{gh+v_0^2}.$$

Scăparea, provine din faptul că relația (6) din nota suscitată nu este adevărată, relația exactă fiind:

(6) $$\overline{OA}+x'=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g}\left[1+\sqrt{1+\frac{2gh}{v_0^2\sin^2\alpha}}\right],$$

după care urmând procedeul din nota arătată, se obține maximum distanței și valoarea unghiului α, dată de relațiile (a) și (b).

2. O demonstrație mai simplă, pentru maximum cerut, se poate face punând ecuația traectoriei sub forma clasică

(c) $y=X.u-\frac{gx^2}{2v_0^2}(1+u^2)$ unde $u=\operatorname{tg}\alpha$; $y=-h$

și derivând

$$\frac{dx}{d\alpha}, \text{ avem } \frac{x}{\cos^2\alpha}-\frac{gx^2}{2v_0^2}\cdot 2\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha}=0$$

de unde

$$x=\frac{v_0^2}{g}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},$$

valoare care înlocuită în ecuația traectoriei (c) obținem pentru α valoarea

(d) $$\sin^2\alpha=\frac{v_0^2}{2(v_0^2+gh)},$$

iar ca maxim al distanței cerute expresia

(a) $$\sqrt{h^2+\frac{v_0^2}{g^2}(v_0^2+2gh)}.$$

3. O altă demonstrație și mai simplă este următoarea:

Se știe că traectoriile ce au unghiul de tragere α variabil, înfășoară parabola de siguranță a cărei ecuație este

$$y=-\frac{gx^2}{2v_0^2}+\frac{v_0^2}{2g}.$$

Dreapta $y = -h$, tae parabola de siguranţă în punctele B, B_1 de coordonate

$$(\pm \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2+2gh},\ -h).$$

Maximum distanţei cerute, este dat evident de traectoria care este tangentă în punctul B la parabola de siguranţă şi deci dat de expresia

$$\sqrt{h^2+x_B^2}=\sqrt{h^2+\frac{v_0^2}{g^2}(v_0^2+2gh)}$$

iar unghiul de tragere α, corespunzător acestei abscise are drept valoare

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+2gh}},$$

aflat înlocuind valoarea abscisei maxime în ecuaţia traectoriei.

Expresiile unghiului de tragere α, găsite la punctele (2) şi (3), sunt identice cu aceea găsită în Culegerea de exerciţii şi probleme.

4) Dacă distanţa h este deasupra, iar nu dedesubtul punctului O, atunci maximum distanţei şi expresia unghiului de tragere sunt aceleaşi, cu condiţia de a schimba semnul lui h, obţinându-se astfel soluţia problemei 427 din menţionata Culegere de probleme.

LT-C-DOR AURELIAN STAN

---

20. — *Asupra articolului din acest număr.*

Fiindcă în coloana 2-a a tabloului (T), din articolul citat, avem în fiecare linie aceiaşi funcţie

$$(1)\qquad z=\frac{1}{2i}\lg z,\qquad (i=\sqrt{-1}),$$

iar în coloana 1-a avem funcţiile arc tg Y, arc sin Y, arc cos Y, rezultă că dacă se înlocueşte Y, respectiv, cu valorile lor din coloana 4-a, se obţin funcţiile

$$(2)\quad y_1=\operatorname{arc\,tg} i\frac{A-Z}{A+Z},\ y_2=\operatorname{arc\,sin}\left(\pm\frac{Z-}{2i\sqrt{AZ}}\right),$$

$$y_3=\operatorname{arc\,cos}\left(\pm\frac{Z+A}{2\sqrt{AZ}}\right),$$

unde $i\sqrt{-1}$, A este o constantă oarecare reală sau imaginară, iar Z este o funcţie oarecare de variabila x.

Rezultă din articolul citat, că funcţia (1) şi funcţiile (2) au aceiaşi derivată.

Se poate demonstra foarte simplu şi direct, că funcţiile (2) şi (1) au aceiaşi derivată, în felul următor:

Din prima relaţie (2), deducem

$$(3)\qquad \operatorname{tg} y_1=i\frac{A-Z}{A+Z}.$$

Dar,

$$\sin y_1=\frac{\operatorname{tg} y_1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 y_1}},\ \cos y_1\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 y_1}}$$

şi înlocuind aci pe $\operatorname{tg} y_1$ cu valoarea sa din (3), obţinem

$$\sin y_1=\frac{i\frac{A-Z}{A+Z}}{\pm\sqrt{1-\frac{(A-Z)^2}{(A+Z)^2}}}=i\frac{A-Z}{\pm 2\sqrt{AZ}}=\pm\frac{Z-A}{2i\sqrt{AZ}},$$

$$\cos y_1=\frac{1}{\pm\sqrt{1-\frac{(A-Z)^2}{(A+Z)^2}}}=\pm\frac{Z+A}{2\sqrt{AZ}}.$$

De aci deducem

$$(4)\quad y_1=\operatorname{arc\,sin}\left(\pm\frac{Z-A}{2i\sqrt{AZ}}\right),\ y_1=\operatorname{arc\,cos}\left(\pm\frac{Z+A}{2\sqrt{AZ}}\right).$$

Rezultă că aceste funcţii (4) şi $y_1=\operatorname{arc\,tg} i\frac{A-Z}{A+Z}$, adică funcţiile (2) au aceiaşi derivată.

Aceiaşi derivată are şi funcţia (1), cum am demonstrat în *problema 1-a* a articolului din N-rul trecut.

V. ALACI

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul LI, No. 12, August 1946. † Ing. Insp. General *Victor Bruckner*, de Ing. *Teofil Revici*. O metodă generală pentru rezolvarea unor probleme de aritmetică, de *O. N. Ţino*. Extindere a unei metode întrebuinţate în Hidraulică la studiul fenomenelor mecanice, de *Alexandru Stoenescu*. Asupra regulei lui *L'Hospital*, de *Şerban Gheorghiu*. Raport pentru premiul „*Spiru Haret*", de *Al. Bunescu*, *Al. Stoenescu*, *Gabriela Ţiţeica*. Note matematice. Probleme rezolvate şi propuse. Tabla de materii.

2. *Buletinul Politehnicei „Gh. Asachi" din Iaşi*, T. 1, Fasc. 1. Janvier à Juin 1946. Avem plăcerea să anunţăm corespondenţilor noştrii apariţia acestei noui publicaţi

periodice, remarcabilă, care va apare trimestrial. Tomul primit, conține următoarele lucrări: Sur les quasicycles, par *Al. C. Climescu*, Sur „L'aire" des courbes gauches fermées, par *Ilie Popa*. Les droites „C" de correspondance, par *Ion Creangă*. Sur le vecteur oréolaire d'une courbe gauche, par *Gh. Gheorghiev*. Sur une famille de surfaces généralisant les quadriques de révolution, par *Adolf Haimovici*. Mécanique non — linéaire sur les systèmes oscillatoires non linéaires, par *D. I. Mangeron*. Notations pratiques dans le calcul chimique, par *Const. Strub* Nouvelle théorie sur l'origine de l'énergie dans un système chimique, par *I. Ciochină*. Sels complexes du carboxethyle — indandione, par *Fluor D. Rădulescu* et *Valeriu I. Moga*. Contribution à l'amélioration du ricin, par *A. S. Potlog*. Sur l'amélioration du blé. Recherches et méthodes, par *Șt. Popesco*. Sur la présence de l'aburnum anagyroides medicus en Roumanie, par *E. Țopa*. Contribution à la connaisssance des micromycètes des environs de Orăștie, dans la district de Hunedoară, par *C. Sandu-Ville*. Contribution à l'échauffement d'une machine à courant continu fonctionnant sous différentes charges, par *N. Popinceanu*. L'influence de la variation de l'entrefer sur le fonctionnement d'un moteur d'induction polyphasé, par *Cesar Parteni Antoni* et *Vasile Corlățeanu*. Contributi n à l'étude de la récupération de l'énergie de freinage dans la traction éléctrique à courant continu. par *Gérard D'Albon*. Contribution dans le problème de l'intersection topographique inverse, par *Mihai P. Botez*. Contribution à l'étude des injecteur à l'eau, adoptés aux carburateurs du type *Ensein*, par *N. V. Boțan* et *G. Gh. Scodigor*. Sur le rythme de la croissance chez le blé et sur l'influence des engrais sur ce rythm, par *N. Zamfirescu*.

PROBLEME REZOLVATE

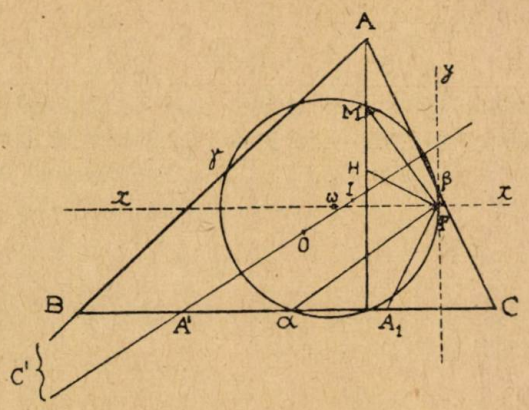
Problema 2212. — *Fie* I *și* O *centrul cercului înscris și al cercului circumscris unui triunghiu* A B C. *Dreapta* O I *taie laturile triunghiului în* A′, B′, C′. *Fie* A_1, B_1, C_1, *simetricele punctelor* A′, B′, C′ *față de mijloacele laturilor* BC, CA, AB, *iar* H *ortocentrul triunghiului* A B C. *Să se demonstreze că cercurile de diametre* HA_1, HB_1 HC_1 *mai au un punct comun în afară de* H.

G-L. GH. BUICLIU

Soluție. Fie α, β, γ mijloacele laturilor B C, C A, A B. Cercurile de diametru A A′ B B′ C C′ trec prin punctul F al lui *Feuerbach* al triunghiului A B C[1]. Duc prin F paralela Fx la B C și Fy la A H și unesc F cu mijlocul M al lui A H. De oarece, prin construcție,

$$A'\alpha = \alpha A,$$

înseamnă că razele F A′, F α, F A, ale fasciculului $\varphi(x\,A'\,\alpha\,A_1)$ determină pe raza B C, paralelă la Fx, segmente egale, deci *fascicolul este armonic*. La fel F$(y\,A\,M\,H)$ este un fascicol armonic și cum F$y \perp$ Fx, F A $\perp$ F A′, F M $\perp$ F α (M și α fiind diametral opuse pe cercul ω al celor 9 puncte), rezultă că F H $\perp$ F A_1, deci cercul de diametru H A_1 trece prin F ca și cercurile de diametru H B_1, H C_1.



Nu s-a primit nici o soluție acceptabilă pentru această problemă.

Problema 2250. — *Să se arate că*:

$$\frac{5\,C_4^0}{1.2.3.4}+\frac{7\,C_4^2}{2.3.4.5}+\frac{9\,C_4^2}{3.4.5.6}+\frac{11\,C_4^3}{4.5.6.7}+\frac{13\,C_4^4}{5.6.7.8}=\frac{C_5^0}{1.2.3}+\frac{C_5^1}{2.3.4}+\frac{C_5^2}{3.4.5}+\frac{C_5^3}{4.5.6}+\frac{C_5^4}{5.6.7}+\frac{C_5^5}{6.7.8}.$$

MARIA MEUMANN

Soluție. Observăm că putem scri succesiv

$$\frac{5\,C_4^0}{1.2.3.4}=\frac{C_4^0}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4},$$

$$\frac{7\,C_4^1}{2.3.4.5}=\frac{C_5^1}{2.3.4}+\frac{3}{2.3.4.5},$$

$$\frac{9\,C_4^2}{3\,4.5.6}=\frac{C_5^2}{3.4.5}-\frac{6}{3.4.5.6},$$

$$\frac{11\,C_4^3}{4.5.6.7}=\frac{C_5^3}{4.5.6}-\frac{26}{4.5.6.7},$$

$$\frac{13\,C_4^4}{5.6.7.8}=\frac{C_5^5}{5.7.8}+\frac{C_5^4-4}{5.6.7}.$$

Adunând aceste relații și notând cu E_1 și E_2, respectiv, cei doi membri ai relației date, obținem

$$(1)\qquad E_1 = E_2+\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{3}{2.3.4.5}-\frac{6}{3.4\,5.6}-$$

[1]) Proprietate cunoscută.

$$\frac{26}{4.5.6.7} - \frac{4}{5.6.7}.$$

Cum însă

$$\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{3}{2.3.4\,5} - \frac{6}{3.4.5.6} - \frac{26}{4.5.6.7} - \frac{4}{4.6.7}$$
$$= \frac{5\,6\,7 + 3.6.7 - 6.2\,7 - 2\,6.2.3 - 4.2.3.4}{7!} =$$
$$\frac{210 + 126 - 84 - 156 - 96}{7!} = \frac{0}{7!} = 0,$$

prin urmare relaţia (1) devine

$$E_1 = E_2$$

şi astfel identitatea cerută este stabilită.

Soluţii date de d-ra *Tarţa Valeria* (P., T.), şi de d-nii: *Balanescu Chirică* (student, Cluj), *Barbu Ion* (Romanaţi), *Bogza Mihai* (Lic. Deva), *Braşoveanu Gh.* (Colegiul Craiova), *Chesaru Cristea* (P., T.), *Chiriac C-tin*, *Cochela Livius* (Lic. Militar Timişoara), *Constantinescu Ilie* (P.,T.), *Coţiu Aurel* (student, Cluj), *Filimon Ioan* (Lic, Militar Timişoara), *Florian Costea* (Lic. Beiuş), *Ghetea Traian* (Lic. Făgăraş), *Giurconiu Mihail* (P., T.), *Gligor Ioan* (P., T.), *Gottard Francisc* (P., T.), *Kinski Ioan* (P., T.), *Kluger Ioan*, *London Emeric* (P., T.), *Mazilu M.*, *Mărcuţiu Silviu* (Lic. Cluj), *Miclea Nicolae* (P., T.,), *Pisanca Ionel* (Colegiu Timişoara), *Plângu Ioan* (Lic. Tulcea), *Popescu Barbu* (Lic. Milit. Timişoara), *Popescu D-tru* (P.,T.), *Rogoz Ioan* (Lic, Milit., Timişoara), *Rothenstein Bernard* (P., T.), *Serdeleanu Gh.* (P., T.), *Serengău Mihai* (P., T.), *Stroescu Florea*, *Stanciu Petre* (P., T.), *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Tincu C-tin* (P., T.), *Tripsa I.* (Lic. Milit. Timişoara), *Tutor Aurel* (Lic. Făgăraş) şi *Vrânceanu Gh.* (Lic. Milit. Timişoara).

Problema 2363. — *Să se determine valoarea lui a astfel încât polinomul*

$$P(x) = a\,m\,x^{m+2} - (2\,a\,m + m + a - 1)\,x^{m+1} + (a+1)(m+1)\,x^m - (m - a + 1)\,x + m - a - 1$$

să fie divizibil cu $(x-1)^4$. *Înlocuind apoi pe a cu valoarea găsită, să se calculeze*

$$\lim_{x-1} \cdot \frac{P(x)}{(x-1)^4}.$$

GH. D. SIMIONESCU

Soluţie. Pentru ca $P(x)$ să fie divisibil prin $(x-1)^4$, trebuie cu $m+2 \geqq 4$ şi ca $P(x)$, $P'(x)$, $P''(x)$, $P'''(x)$ să se anuleze pentru $x=1$. Primele trei derivate sunt:

$$P'(x) = a\,m\,(m+2)\,x^{m+1} - (2\,a\,m + m - a - 1)(m+1)\,x^m + m\,(a+1)(m+1)\,x^{m-1} - (m - a + 1),$$
$$P''(x) = m\,(m+1)[a\,(m+2)\,x^2 - (2\,a\,m + m + a - 1)\,x + (a+1)(m-1]\,x^{m-2}$$
$$P'''(x) = m\,(m+1)[a\,m\,(m+2)\,x^2 - (2\,a\,m + m + a - 1)(m-1)\,x + (a+1)(m-1)(m-2)]\,x^{m-3}$$

Se observă că pentru $x=1$, dezvoltând calculele, avem

$$P(1) = P'(1) = P''(1) = 0 \text{ şi } P'''(1) = -m + 3\,a + 1.$$

Anulând pe $P'''(1)$, deducem

(1) $$a = \frac{m-1}{3}$$

Astfel, prima parte a problemei este terminată. Rămâne să aflăm limita cerută.

Înlocuind pe a cu valoarea aflată, observăm că $\frac{P(x)}{(x-1)^4}$ ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$ pentru $x=1$. Dar fiindcă şi $\frac{P'(x)}{[(x-1)^4]'}$, $\frac{P''(x)}{[(x-1)^4]''}$, $\frac{P'''(x)}{[(x-1)^4]'''}$ iau tot forma nedeterminată $\frac{0}{0}$, astfel că conform regulei lui *L'Hôspital*, vom lua

(2) $$\lim_{x=1} \frac{P(x)}{(x-1)^4} = \frac{P^{(IV)}(1)}{4!}.$$

Pentru aceasta, luând derivata lui $P'''(x)$ de mai sus, avem

$$P^{(IV)}(x) = m\,(m+1)(m-1)[a\,m\,(m+2)\,x^2 - (2\,a\,m + m + a - 1)(m-2)\,x + (a+1)(m-2)(m-3)]\,x^{m-4},$$

în care înlocuind pe a cu valoarea sa din (1) şi făcând şi $x=1$, obţinem

$$P^{(IV)}(1)=\frac{m(m+1)(m-1)}{3}\{m(m-1)(m+2)-[2(m-1)m+3m+m-1-3]m-2)+(m+2)(m-2)(m-3)\}$$
$$=\frac{m(m+1)(m-1)}{3}[m(m-1)(m+2)-2(m-1)(m+2)(m-2)+(m+2)(m-2)(m-3)]$$
$$=\frac{m(m+1)(m-1)(m+2)}{3}[m(m-1)-2(m-1)(m-2)+(m-2)(m-3)]=\frac{2(m+2)(m+1)m(m-1)}{3}.$$

Relația (2) devine astfel

$$\lim_{x=1}\frac{P(x)}{(x-1)^4}=\frac{2}{3}\frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{4}=\frac{2}{3}C_{m+2}^4.$$

Soluții date de d-ra *Costin Alexandrina* (P., T.), și d-nii *Birănaș Ion* (P., T.), *Chiriac C-tin* (Brăila), *Coțiu Aure* (Bihor), *Giurconiu Mihai* (P., T.), *Novac Ioan* (Lic, Brăila), *Pali Sergiu* (P., T.), *Popa Vasile* (P., T.), *Stoian Anato* (P., T.), și *Tincu C-tin* (P., T.).

Observare. D-l *Chiriac C-tin* a dat o frumoasă soluție, obținând chiar câtul lui $P(x)$ prin $(x-1)^4$ După ce află valoarea lui a ca în soluția de mai sus, d-sa continuă:

Inlocuind pe $a=\frac{m-1}{3}$ în $P(x)$, funcția devine

$$P(x)=\frac{1}{3}[m(m-1)x^{m+2}-2(m-1)(m+2)x^{m+1}+(m+1)(m+2)x^m-2(m+2)x+2(m-1)].$$

Conform articolului D-lui Prof. *V. Alaci* din „Bulletin Scientifique de L'École Polytechnique de Timișoara" Tome 4, Fasc. 3—4, 1932, $Q(x)$ câtul lui $P(x)$ prin $(x-1)^4$ este dat de

$$Q(x)=(-1)^q[a_px^{p-q}+(a_{p-1}+a_pK_q^1)x^{p-q-1}+(a_{p-2}+a_{p-1}K_q^1+a_pK_q^2)x^{p-q-2}+\cdots$$
$$+(a_q+a_{q+1}K_q^1+a_{q+2}K_q^2+\cdots+a_pK_q^{p-q})],$$

unde $q=4$; $p=m+2$; $K_q^r=\frac{q(q+1)\ldots(q+r-1)}{r!}$; $a_p=m(m-1)$; $a_{p-1}=-2(m-1)(m+2)$;

$a_{p-2}=(m+1)(m+2)$, $a_{p-3}=a_{p-4}=\cdots=a_2=0$; $a_1=-2(m+2)$; $a_0=2(m+1)$.

Înlocuind în $Q(x)$ avem

$$Q(x)=\frac{1}{3}\{m(m-1)x^{m-2}+[-2(m+2)(m-1)+m(m-1)K_4^1]x^{m-3}+[(m+1)(m+2)-2(m-1)(m+2)K_4^1+$$
$$m(m-1)K_4^2]x^{m-4}+[(m+1)(m+2)K_4^1-2(m-1)(m+2)K_4^2+m(m-1)K_4^3]x^{m-3}+\cdots$$
$$\cdots+[(m+1)(m+2)K_4^{m-4}-2(m-1)(m+2)K_4^{m-3}+m(m-1)K_4^{m-2}]\}.$$

Deci

$$\lim_{x=1}\frac{P(x)}{(x-1)^4}=\lim_{x=1}Q(x)=Q(1).$$

De aci,

$$Q(1)=\frac{1}{3}[m(m-1)(1+K_4^1+K_4^2+\cdots+K_4^{m-2})-2(m-1)(m+2)(1+K_4^1+\cdots+K_4^{m-3})+$$
$$(m+1)(m+2)(1+K_4^1+K_4^2+\cdots+K_4^{m-4})],$$

sau

$$Q(1)=\frac{1}{3}\{(1+K_4^1+\cdots+K_4^{m-3})[m(m-1)-2(m-1)(m+2)+(m+1)(m+2)]+m(m-1)K_4^{m-2}-(m+1)(m+2)K_4^{m-3}\}$$

Dar,

$$1+K_4^1+K_4^2+\cdots K_4^{m-3}=\frac{1}{3!}\sum_2^{m-1}(m+1)(m-1)m=\frac{1}{3!}\left[\sum_2^{m-1}m^3-\sum_1^{m-1}m\right]$$
$$=\frac{1}{6}\left[\frac{m^2(m-1)^2}{4}-\frac{m(m-1)}{2}\right]=\frac{m(m-1)(m+1)(m-2)}{24}.$$

Inlocuind avem

$$Q(1)=\frac{m(m-1)(m+1)}{36}[3(m-2)+2m(m-1)-2(m-2)(m+2)]=\frac{m(m-1)(m+1)(m+2)}{36},$$

deci

$$\lim_{x=1}\frac{P(x)}{(x-1)^4}=\frac{m(m-1)(m+1)(m+2)}{36}=\frac{2}{3}C_{m+2}^4.$$

Problema 2367. — *Să se stabilească relaţia,*

$$\sum\frac{\sin^2(a+b)+\sin^2(a-b)}{\cos^2 a+\cos^2 b-2\cos^2 a\cos^2 b}=6,$$

oricare ar fi arcele a, b, c.

ILIE CONSTANTINESCU

Soluţie. Termenii fracţiei din primul membru, dezvoltaţi, se pot scri succesiv

$$\sin^2(a+b)+\sin^2(a-b)=(\sin a\cos b+\sin b\cos a)^2+(\sin a\cos b-\sin b\cos a)^2$$
$$=2(\sin^2 a\cos^2 b+\sin^2 b\cos^2 a);$$
$$\cos^2 a+\cos^2 b-2\cos^2 a\cos^2 b=\cos^2 a(1-\cos^2 b)+\cos^2 b(1-\cos^2 a)=\cos^2 a\sin^2 b+\cos^2 b\sin^2 a.$$

Rezultă de aci că primul membru al relaţiei date, devine

$$\sum\frac{\sin^2(a+b)+\sin^2(a-b)}{\cos^2 a+\cos^2 b-2\cos^2 a\cos^2 b}=$$

$$\sum\frac{2(\sin^2 a\cos^2 b+\sin^2 b\cos^2 a)}{\sin^2 a\cos^2 b+\sin^2 b\cos^2 a}=\sum 2=2+2+2=6.$$

Relaţia dată este astfel stabilită.

Soluţii date de d-ra *Butnariu Lia* (Lic. R.-Sărat), şi de d-nii: *Arnăutu Marin* (P., T.), *Balaniscu Chirică* (student, Cluj), *Beşchea Radu* (P., B.), *Birănaş Ion* (P., T.), *Bogza Mihai* (Lic. Roman), *Brasch Andrei* (P., T.), *Braşoveanu Gh.* (Colegiu Craiova), *Chiriac C-tin* (Brăila), *Coţiu Aurel*, *Dobrişan Alexandru* (P., T.), *Giurconiu Mihai* (P., T.). *Gligor Ioan* (student, Cluj), *Gotiard Francisc* (P., T), *Haret Radu* (Lic. Francez Bucureşti), *Iiea Vasile* (P., T.), *Macavei Eugen* (P., T.), *Nedelcu Ulpius* (Şc. Of. de Geniu, Bucureşti), *Novac Ioan* (Lic. Brăila), *Pali Sergiu* (P., T.), *Popa Vasile* (P., T.), *Popescu D-tru* (P., T.), *Popovici E. Dan* (P., T.), *Prisăcaru Mircea* (P., I.), *Sasu Ioan* (P.,T.), *Serengău Mihai* (P., T.), *Şchiopu Ioan* (P., T.,) *Stroescu Florea* (Lic. Caracal), *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Tincu C-tin* (P., T.), *Tripsa Iosif* (Colegiu Timişoara), *Vlăduţ C-tin* (P., T.) şi *Vrânceanu Gh.* (Predeal).

Problema 2380. — *Să se determine* A *astfel ca expresia*

$$E=\sqrt{\frac{x^2+3x^2}{5x-1}}-Ax$$

să aibă pentru $x=\infty$ *o limită finită şi bine determinată.*

AL. TIGANOIU

Soluţie. Observăm întâi că expresia dată se poate scri şi astfel

$$(1)\quad E=x\sqrt{\frac{x+3}{5x-1}}-Ax=x\left(\sqrt{\frac{x+3}{5x-1}}-A\right).$$

Valoarea lui E pentru $x=\infty$ este

$$E=\infty\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-A\right).$$

Pentru ca să avem pentru E o valoare finită trebue ca paranteza să fie zero, căci altfel am avea $E=\infty$, trebue deci să avem

$$A=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

In acest caz relaţia (1) se mai poate scri

$$\frac{\sqrt{\frac{x+3}{5x-1}}-\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{x}},$$

care pentru $x=\infty$, ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$.

Aplicăm deci regula lui *L'Hôspital* şi avem succesiv

$$E=\lim_{x=\infty}\frac{\frac{5x-1-5(x+3)}{2\sqrt{\frac{x+3}{5x-1}}(5x-1)^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x=\infty}\cdot\frac{16x^2}{2\sqrt{\frac{x+3}{5x-1}}(5x-1)^2}$$

$$=\lim_{x=\infty}\cdot\frac{16}{2\sqrt{\frac{1+\frac{3}{x}}{5-\frac{1}{x}}}\cdot\left(5-\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{16}{2\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 25}=\frac{8\sqrt{5}}{25}.$$

Rezultă, prin urmare, că expresia dată are pentru $x=\infty$ o limită finită şi bine determinată pentru $A=\frac{1}{\sqrt{5}}$ şi această limită este $\frac{8\sqrt{5}}{25}$.

Soluţii date de d-nii: *Bălteanu Gh.* (stud.), *Beşchea Radu* (P.,B.), *Birănaş Ioan* (P.,T.), *Constantinescu Ilie* (P. T.), *Crăciunescu Victor*, *Dobrişan Alexandru* (P., T.), *Domilescu Eugen* (P.,T.), *Fleşeriu Eugen* (Alba-Iulia), *Ellman Morel* (P.,T.) *Frunză Radu* (P., T.), *Ghiciu Vasile* (P., T.), *Giurconiu Mihai* (P., T.), *Goldiş Gh.* (P., T.), *Grigore Gh.* (student), *Macavei Eugen* (P , T.), *Mărcuţiu Silviu* (Lic. Cluj), *Nedelcu Ulpius* (Şc Of. de Geniu, Bucureşti), *Novac Ioan* Lic. Brăila), *Pali Sergiu* (P., T.), *Popa Vasile* (P , T.), *Popescu D-tru* (P., T), *Popovici Dan* (P., T.), *Roth Rudolf Egon* (P., T.), *Sasu Ion* (P., T.), *Serengău Mihai* (P., T.), *Şrager Adrian* (P., T.), *Stern Tiberiu* (P., P.), *Stroescu Florea* (Lic. Caracal), *Tincu C-tin* (P., T.) şi *Titero Ioan* (P., T.).

PROBLEME PROPUSE

2448. — Se cer numerele de câte n cifre $a\,a\,\ldots a\,b$ şi $c\,a\,a\ldots a$ ştiind că primul este egal cu al doilea înmulţit cu b.

G-L GH. BUICLIU

2449. — Se se găsească patratul perfect de cifre distincte $a\,b\,c\,d\,e\,f$, ştiind că media aritmetică a cifrelor b şi e este egală cu media geometrică a numărului format de cifrele extreme, iar c este patrat perfect impar.

MIHAI GIURCONIU

2450. — Pentru ce valori reale a şi b ecuaţia

$$x^6-a^2x^5+bx^4+x^2-4x+13=0$$

admite rădăcina $2+3i$? $(i=\sqrt{-1})$.

Inlocuind în ecuaţie pe a şi b cu valorile găsite, să se rezolve complect ecuaţia dată.

V. ALACI

2451. — Fie A′, B′, C′ mijloacele laturilor triunghiului A B C. Din punctele A, B, C ca centre şi cu aceiaşi rază se descriu trei cercuri care întâlnesc respectiv laturile B′C′, C′A′, A′B′ în grupele de puncte (A_1, A_2) (B_1, B_2), (C_1, C_2). Să se arate că aceste puncte sunt situate pe acelaşi cerc, având ca centru ortocentrul H al triunghiului A B C.

N. ABRAMESCU

2452. — In triunghiul dreptunghic B A C, D este piciorul înălţimei din A pe B C, iar E şi F respectiv jumătăţile laturilor A B şi A C. Figura A E D F este un patrulater inscriptibil a cărui suprafaţă este jumătate din cea a triunghiului BAC.

C-PT. G. P. BOERESCU

2453. — Fie (A, B, C, D) o diviziune armonică

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=-\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

şi J mijlocul segmentului C D, iar O arbitrar. Avem

$$\overline{OA}^2\cdot\overline{BJ}-\overline{OB}^2\cdot\overline{AJ}=\overline{OC}\cdot\overline{OD}\cdot\overline{BA}.$$

N. N. MIHAILEANU

2454. — Să se stabilească identităţile

$$\sin^3\left(a+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin^3 a+\sin^3\left(a-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{9}{4}\sin a$$

$$\cos^3\left(a+\frac{\pi}{3}\right)+2\cos^3 a+\cos^3\left(a-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{9}{4}\cos a.$$

C-PT. MIRCEA GRUMAZESCU

2455. — Să se verifice identităţile

$$\sum_{k=1}^{n}\sin 2(2k+1)x-\cos\frac{\pi}{3}\cos 2x\sum_{k=1}^{n}\sin 4(2k+1)x=\frac{\sin^4 2(n+1)x-\sin^4 2x}{\sin 2x}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin 2(2k+1)x+\cos\frac{\pi}{3}\cos x\sum_{k=1}^{n}\sin 4(2k+1)x=\frac{\cos^4 2x-\cos^4 2(n+1)x}{\cos 2x}$$

şi apoi să se arate că

$$\sum_{k=1}^{n}\sin 2(2k+1)x=\frac{\sin 2nx\sin 2(n+2)x}{\sin 2x}.$$

FLORIAN GOGA

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Balaniscu Aurică (P; 2262, 2234); *Bălauţă Mihai* (2419, 2427, 2429, 2431, 2435); *Boerescu P. G.* (P; 2407); *Chioreanu I.* (2404, 2406, 2413, 2423, 2424, 2427, 2429, 2435); *Ciucescu Paul* (2362, 2405, 2427, 2435, 2437); *Coman Liviu* (2427, 2438); *Crăciunescu Victor* (2281, 2389, 2391, 2429, 2444); *Criveanu Eugenia* (2362, 2424), *Diaconu Vasile* (2362, 2427, 2430, 2431, 2435, 2438, 2440); *Georgian Nicolae* (2405); *Gottard Francisc* (N.); *Hurezeauu Romulus* (2405, 2419, 2437); *Mărcuţiu Silviu* 2381, 2390, 2391, 2401, 2413, 2427, 2429, 2444); *Novac Ioan* (N;,P, 1140, 1149, 1156, 2118, 2121, 2220, 2279, 2302, 2314, 2316, 2319, 2320, 2323, 2325, 2336, 2351, 2379, 2344, 2358, 2362, 2373, 2385, 2397, 2428, 2435, 2437, 2438, 2439, 2440, 2443, 2444, 2446, 2447); *Pisanca Ioan* (P; 2218, 2249, 2362); *Plângu Ioan* (2290, 2413); *Popescu D-tru* (2063, 2087, 2338, 2375, 2379, 2390, 2405, 2419, 2424, 2429); *Stanciu Valeriu* (P; 1313, 1314, 1330, 1333, 1340, 2419); *Teodorescu Petru* (N; P; 2194, 2333, 2269, 2373, 2415, 2421, 2426, 2432, 2434, 2437, 2441, 2443, 2446, 2447); *Wegener Eugen* (P.).

INFORMAŢIUNI

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, pentru a fi luate în consideraţie, trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Rugăm pe corespondenţii noştrii ca problemele propuse să fie însoţite de soluţiile corespunzătoare.

Legându-se colecţiileR. M. T., anii II-XXV, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 1200 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II—XXV, cu preţul de lei 8000 volumul şi se trimet la cerere.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

ANUL XXVI. OCTOMBRIE 1946 No. 8.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

BIBLIOTECA CENTRALĂ ... SIBIIU

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 1000 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 8000 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRĂINĂTATE ESTE DE 20.000 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **MARIN GH. DUMITRESCU**: EVOLUTIA DESVOLTARII GEOMETRIEI NEEUCLIDIENE.
2 **S. BOUVAIST** ET **V. THÉBAULT**: SUR UNE TÉTRAÈDRE SPÉCIAL.
3. NOTE MATEMATICE 21, 22, 23.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 2112, 2381, 2389, 2391, 2393.
6. PROBLEME PROPUSE: 2456 - 2463.
7. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timișoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Pentru nouii abonaţi, costul abonamentului pentru anul XXVI (15 Martie 1946 — 15 Februarie 1947) este de 8000 (opt mii) lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale, vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Politehnica Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Politehnica Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul C E C No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Politehnica Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXVI, de 8000 (opt mii) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXV inclusiv, broşate, 8000 lei fiecare.

ANUL XXVI — No. 8. TIMISOARA, OCTOMBRIE 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 1000 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 8000 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Politehnica Timișoara.

EVOLUȚIA DESVOLTĂRII GEOMETRIEI NEEUCLIDIENE

de
MARIN GH. DUMITRESCU
Asistent la Catedra de Geometrie Analitică
Școala Politechnică București

Știut este că la baza geometriei noastre uzuale stau de secole principiile datorite genialului geometru grec *Euclid*.

Faimoasele sale „propoziții" satisfac, fără contrazicere, practica vieții noastre imediate; dar nici când spiritul omenesc nu a fost caracterizat prin „staticism" și deaceia — în curgerea vremurilor — „dinamismul" său în mod natural a ajuns să se întrebe ce ar rezulta dacă vreuna din „propozițiile" lui *Euclid* n'ar fi adevărată, sau ar fi înlocuită cu alta mai generală. Cu alte cuvinte, se căuta existența unei noui geometrii — diferită sau mai generală decât aceia a lui *Euclid* — adică o „geometrie neeuclidiană".

Fără a mai pomeni aci de nenumăratele încercări de a clădi o nouă geometrie, încercări ce datează din secolul I a. Chr. și până în secolul XVIII-lea după Chr.; putem spune că sunt numai o sută de ani de când geometria neeuclidiană își făcu apariția în cercul matematicienilor, deși „duhul" ei plutea de mult în spiritul unora dintre geometri.

Originile nouei geometrii fură încercările de demonstrare ale postulatului lui *Euclid;* că printr'un punct exterior unei drepte se poate duce o paralelă la acea dreaptă și numai una singură.

In această privință prima încercare demnă de a fi amintită este aceia a iezuitului *Saccheri* (1667—1733) care în opera sa „Euclides ab omni noevo vindicatus" căută demonstrarea postulatului raționând astfel: presupunem că postulatul nu este adevărat și să tragem de aci toate consecințele logice. Dacă nu cădem peste nici o contradicție logică, urmează că postulatul nu e indispensabil în geometrie și deci nu poate fi demonstrat. Dar dacă ajungem la o contradicție logică, aceasta înseamnă că presupunerea noastră a fost absurdă, postulatul e necesar și deci poate fi demonstrat.

In cursul deducțiilor sale logice *Saccheri* a crezut că a dat peste o contradicție și că a demonstrat postulatul; în realitate ideia lui a fost bună dar a aplicat-o greșit, căci cea dintâi alternativă are loc; nu se întâlnește nici o contradicție logică oricât de mult s'ar trage consecințe din negarea postulatului lui *Euclid.* Ca atare se poate clădi o geometrie fără acest postulat, o geometrie neeuclidiană.

Din punct de vedere pur speculativ și metafizic *Saccheri* este cât se poate de aproape de ideile care vor fi exprimate abia peste o sută de ani de marele geometru rus *Lobatchewsky.*

Moartea lui *Saccheri* (1733), la două luni abia după publicarea operii sale capitale — apărută într'un număr restrâns de exemplare — așternu un văl de uitare peste opera genialului geometru italian, până când *E. Beltrami* cu celebrul său articol „Un precursore italiano di *Legendre* e di *Lobatchewsky*" (Atti di Lincei) o scoate din uitare, redându-i toată prioritatea cuvenită.

Teoria paralelelor preocupă rând pe rând pe marii geometri ai timpurilor, *Gauss, Legendre,* ... oprindu-ne tocmai la *Lobatchewsky* a cărui operă geometrică, de o importanță covârșitoare în evoluția geometriei neeuclidiene, o putem numi, fără exagerare, „eroică" deoarece el fu complect izolat în toate cercetările sale, iar opera sa nu primi nici o încurajare, sub nici o formă, dela nimeni.

Nicolae Ivan Lobatchewsky se născu în 1793 la Nijni Novgorod, celebru prin târgurile sale. Tatăl său care era arhitect, muri în 1797 lăsându-și familia — soția și cei 2 copii — într'o situație cri-

tică. Curând după moartea tatălui său se stabiliră cu toţii la Cazan, unde tânărul *Ivan* îşi făcu toate studiile, isbutind ca la vârsta de numai 21 de ani să cucerească titlul de profesor la Universitatea al cărui eminent student fusese.

Atras dintr'un început de frumuseţile geometriei căreia îi închină toată activitatea sa, spiritul său nu întârzie mult spre a da la iveală lucrări geniale.

Astfel, în 1829 publică în „Mesagerul Universităţii din Cazan" memoriul intitulat „Asupra principiilor geometriei" care poate fi privit ca prima lucrare expunând nouile concepţii. Din 1835 el începu publicarea în ruseşte a marelui său tratat „Noile principii ale geometriei cu privire asupra teoriei paralelelor" urmat curând de un altul mai concis „Cercetări geometrice asupra teoriei paralelelor".

Numai că, din nenorocire, lucrările sale nu stârniră nici un interes în Rusia; însăşi profesorul său *Barteles*, căruia geometrul rus îi adresase primele sale publicaţiuni şi care îl considera ca primul şi cel mai extraordinar student pe care-l avusese Universitatea din Cazan, privea concepţiile sale, după spusele astronomului *Otto Struwe*, ca foarte ingenioase, însă de loc de natură să facă să progreseze ştiinţa. In 1855, deşi orb, el dicta sub numele de „Pangeometrie" expunerea complectă a concepţiilor sale, expunere ce a apărut atât în limba rusă cât şi în cea franceză. Un an mai târziu (1856) *Lobatchewsky* muri fără să fi reuşit să-şi facă cel puţin cunoscute concepţiile sale.

Din fericire, pe vremea aceia trăia în Franţa, ca profesor al Facultăţii de Ştiinţe dela Bordeaux, un savant în toată accepţia cuvântului *Guillaume Jule Houël*. Dotat cu o cultură multilaterală, spirit plin de entuziasm, *Houël* contribui ca nimeni altul la difuzarea geometriei neeuclidiene.

Pasionat de cercetările geometrice, *Houël* ajunsese la convingerea fermă a imposibilităţii demonstrării postulatului, convingere ce şi-o expune în celebra „Notă asupra imposibilităţii unei demonstraţiuni a postulatului lui *Eulid*". In 1863 *Houël* publică o "Incercare a unei expuneri raţionale a principiilor fundamentale ale geometriei" care avu un adânc răsunet în rândurile matematicienilor.

O întâmplare fericită făcu ca prin 1865 Facultatea de Ştiinţe dela Bordeaux să numere printre studenţii săi un tânăr rus *Potocki*, care semnală lui *Houël*, profesorul său, lucrările lui *Lobatchewsky*.

Luând cunoştinţă de lucrările lui *Lobatchewsky*, *Houël* avu momente de adâncă satisfacere constatând că ideile geniale ale geometrului rus confirmă întru totul pe ale sale.

Houël cu entuziasmul său neegalat şi cu autoritatea sa, deveni cel mai sincer adept al genialului geometru rus.

Cu aceiaşi pasiune *Houël* îmbrăţişă deasemenea lucrările geometrului ungur *Bolyai*.

Trebue să notăm aci ziua de 3 Noembrie 1823 — dată epocală în analele geometriei — când tânărul *Bolyai*, pe atunci ofiţer de geniu la Timişoara, comunica tatălui său, profesor de matematici la Colegiul din Târgu-Mureş, că „a descoperit lucruri aşa de minunate încât el însăşi este profund mişcat".

Câţiva ani se scurseră până când *Bolyai* putu să-şi publice rezultatele preocupărilor sale, apărute întâi în 1829 şi apoi în 1831 sub titlul de „Ştiinţa spaţiilor".

S'a pus întrebarea dacă *Bolyai* şi *Lobatchewsky* nu a ştiut unul de altul.

Frantz Schmidt, arhitect în Timişoara, datorită căruia *Houël* şi odată cu el întreaga lume matematică a apusului luă conştiinţă de opera lui *Bolyai*, printr'o scrisoare adresată lui *Houël* la 8 Noembrie 1884, din Budapesta, spune că el ştie că *Bolyai* ar fi comunicat conţinutul manuscrisului său despre „Ştiinţa spaţiilor" lui *Litrov*, ori acesta era cunoscut că ar fi fost la Cazan profesorul lui *Lobatchewsky;* se poate deci foarte bine ca *Litrov* şi *Lobatchewsky* să-şi fi împărtăşit părerile asupra operii lui *Bolyai*, dar *Frantz Schmidt* adaogă că nu a putut obţine nici o confirmare.

Descoperirea lui *Lobatchewsky* şi *Bolyai* nu dădeau decât unul din aspectele geometriei neeuclidiene. Un alt aspect a rezultat din conferinţa inaugurală a lui *Rieman*. „Asupra ipotezelor care servesc ca bază geometriei" citită în 1854 la Societatea Filozofică din Goettingen, publicată însă numai în 1867, după moartea autorului, şi cunoscută în lumea geometrilor tot datorită lui *Houël*.

Avem deci geometria sub trei aspecte: Euclidiană, Lobatchewskyană, sau Bolyaiană şi Rimaniană; deosebirea dintre ele constând în aceia că în prima o geodezică nu are decât o paralelă dusă printr'un punct dat, pe când într'a doua sunt două şi nici una într'a treia; sau ceiace revine a spune că suma unghiurilor unui triunghiu geodezic este respectiv egală, inferioară sau superioară sumei a două unghiuri drepte.

An cu an lucrări importante şi numeroase au fost publicate de matematicieni din toate ţările pentru a elucida cât mai complect problema fundamentelor geometriei.

Din noianul acesta de nume, pe care pagini întregi de-abia le-ar cuprinde, trebue să reţinem trei de o excepţională importanţă; aceştia sunt belgienii *De Tilly* şi *Mansion* şi apoi americanul *G. Bruce Halstet.* Ceilalţi geometri nu au făcut în mare parte decât să continue şi să desvolte opera acestor maeştri.

Joseph Marie de Tilly (1837—1906), General în armata belgiană şi membru al Academiei Regale din Bruxelles fu pasionat de tânăr pentru matematici şi în special pentru geometrie; astfel că reflectând asupra principiilor geometriei, crezu mai întâi în posibilitatea unei demonstraţiuni a postulatului lui *Euclid;* însă un drum nou şi cu totul personal, relevat în „Studiile sale de mecanică abstractă" conducându-l la rezultate aproape identice cu acelea pe care avu surpiza de a le regăsi mai târziu în opera lui *Lobatchewsky,* îl convinse de importanţa ideilor geometrului rus pe care le îmbrăţişă cu toată căldura. Relaţiile sale cu *Houël* începute în 1870, din pur ştiinţifice, se transformară repede într'o prietenie indistructibilă care avu asupra lui *De Tilly* o influenţă considerabilă. De aci isvorî faimoasa lucrare a lui *De Tilly.* „Incercări asupra principiilor fundamentale ale geometriei şi mecanicei"; unde problema geometriei este abordată cu o siguranţă şi o profunzime remarcabilă Dar concepţia sa cea mai remarcabilă care îl apropie de *Cauchy* fu bazată pe noţiunea primordială şi ireductibilă de „depărtare", adică de intervalul dintre două puncte şi pe relaţia generală care trebue să existe între intervalele a cinci puncte ale spaţiului omogen. Această relaţie era cunoscută de *Legendre* din 1773 pentru spaţiul euclidian, iar în 1873 *Schering* o formulase pentru celelalte două spaţii. In lucrarea sa „Essai de Géométrie analytique générale". *De Tilly* reuşi să pună această relaţie sub forma unui determinant şi să arate că cele trei geometrii, adică a lui *Euclid, Lobatchewsky-Bolyai* şi *Rieman* sunt cuprinse aci; prima fiind un caz de limită a celorlalte două şi că acestea sunt singurele posibile.

Aceste rezultate favorabile care plasară numele lui *De Tilly* în fruntea marilor geometri, confirmau în modul cel mai strălucit ideile fondatorilor geometriei neeuclidiene şi închideau definitiv drumul investigaţiunilor inutile ale acelora care neconvinşi încă, credeau că vor putea demonstra existenţa paralelelor.

Paul Manison (1844—1919) Membru al Academiei Regale belgiene, profesor emerit al Universităţii din Gand a lăsat un mare număr de memorii şi articole raportându-se la o mulţime de subiecte; e suficient să pomenim lucrările sale relativ la „Métagéometrie" asupra căreia dela 1889 şi până la 1914 a publicat vre'o 50 note sau memorii. Tot el, pentru a înlocui vechea revistă a lui *Catalan* „Nouvelles Corespondance" creie excelenta revistă „Mathesis". Suplimentele acestui periodic fură larg deschise tuturor adepţilor geometriei neeuclidiene. Aci îşi publică *Mansion* în 1895 lucrarea sa magistrală „Premiers Principes de la Métagéometrie", urmată în 1897 de o metodă elementară „D'Exposition des Principes de la Géometrie non-euclidiene" şi în 1898 de o notă intitulată „Pour la Géométrie non-euclidiene".

Aşa că datorită acestei minunate reviste „Mathesis", răspândită printre matematicienii intregii lumi, geometria neeuclidiană făcu mulţi paşi înainte.

George Bruce Halsted este cel care a răspândit în Statele Unite ale Americii lucrările geometrilor vechiului continent, traducând pe *Saccheri, Lobatchewsky, Bolyai, Poincaré,* etc. El însuşi adânc pasionat de geometria neeuclidiană, a dat la iveală numeroase lucrări personale printre care putem cita faimosul memoriu „Contribuţia Geometriei Neeuclidiene la Filozofie".

Desigur că mulţi se vor întreba şi se mai întreabă încă, ce valoare are geometria neeuclidiană? unde duce ea? la ce serveşte ea? când de două

mii de ani — spun ei — geometria euclidiană a răspuns tuturor necesităţilor.

Mai mult, când geometria euclidiană — spun partizanii ei — ajunge încă să explice toate legile universului, la ce bun să studiem o nouă geometrie.

Natural, geometria euclidiană precum şi mecanica lui *Newton* vor rămâne primele aproximaţiuni ale ultimelor teorii ale spaţiului şi ale mişcării materiei; dar când învăţaţii tratează chestiunea fundamentală a raportului dintre „Ipoteză şi Ştiinţă", nu prima, ci ultima aproximaţie contează pentru ei şi deci logic este să ne întrebăm dacă actualmente e absolut adevărat că geometria euclidiană ajunge să explice toate fenomenele universului.

Mai mult, în lumea noastră fizică rezultatele obţinute servindu-ne de una din geometrii diferă infinit de puţin de rezultatele pe care le-ar da celelalte două şi numai „comoditatea" este cea care ne împinge ca în practica vieţii să preferim geometria euclidiană. Datorită însă unor consideraţiuni cu totul noui se poate foarte bine ca o geometrie neeuclidiană să aibă avantagii şi să devină necesară cel puţin în unele părţi ale universului nostru fizic; aceasta va fi o consecinţă neaşteptată a teoriilor fizice cele mai moderne şi ale genialelor concepţii ale lui *Einstein*.

Se ştie că lumina are o masă, ea este grea; masă şi energie sunt astăzi sinonime. Experienţe precise şi extrem de delicate au arătat că o rază luminoasă isbind un obiect material exercită asupra lui o presiune care a fost măsurată şi care se poate compara cu aceia a unui proectil sau mai exact al rezultantei presiunilor unei serii de proectile bombardând acest obiect.

Pe de altă parte se ştie că geodezica sau linia dreaptă a fizicienilor nu este identică aceleia a geometrilor şi experienţa a confirmat strălucit acest fapt fundamental pe care acum câţiva ani eram departe de a-l presupune Lumina nu se propagă în linie dreaptă decât în regiunile cereşti unde nu este gravitaţie, adică unde nu sunt mari mase atrăgătoare; însă într'un câmp unde se găsesc astfel, de mase, traectoria sa este încurbată ca acea pe care ar parcurge-o un obiect greu. Acestea sunt observaţiile eclipsei de soare din 29 Mai 1919 făcute la *Sobral* în Brazilia şi în insulele portugheze Principe care s'au precizat cu ajutorul deviaţiei stelelor de către soare, deviaţie a cărei mărime numerică s'a găsit că este exact aceleia prevăzute şi anunţate de *Einstein*. Această incurbaţie va furniza un element de răspuns la această chestiune interesantă. Universul nostru fizic este el conform uneia din cele trei geometri? şi căreia? Lumea reală corespunde geometriei clasice a lui *Euclid*? Nu! a răspuns categoric *Einstein*. Ea nu este euclidiană decât în regiunile depărtate de orice masă grea; este curbă în vecinătatea astrelor şi cu atât mai mult cu cât este mai aproape. Aşa că ţinând seamă de rezultatele achiziţionate cu ocazia eclipsei din 1919 şi neputând utiliza, din cauza condiţiunilor nefavorabile pe cele ale eclipsei din 1929, putem spune că geometria spaţiului curb a lui *Rieman* este aceia care ar părea a se adapta mai bine universului real.

Aşa dar geometria neeuclidiană justifică, complectează şi consolidează în modul cel mai strălucit opera admirabilă a lui *Euclid*.

BIBLIOGRAFIE: *N. Abramescu:* „Introducere în Studiul geometriilor neeuclidiene";
P. Barbirin: „La Géométrie non euclidiene"; *Ch. Noraman-Einstein* şi Universul; *P. Sergescu:* „Gândirea Matematică".

SUR UNE TÉTRAÈDRE SPÉCIAL

par

R. BOUVAIST et V. THÉBAULT

A. Préliminaires. Si l'on transforme les sommets A, B, C d'un triangle $T \equiv ABC$, de côtés $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, par une inversion (D, k) ayant pour centre un point D extérieur à son plan et pour module une constante arbitraire k, de manière que les points obtenus A', B', C' soient les sommets d'un triangle A' B' C' *rectangle* en A', on a

$$\overline{B'C'}^2 = \overline{C'A'}^2 + \overline{A'B'}^2,$$

et

$$B'C' = \frac{k\,a}{DB.DC},\quad C'A' = \frac{k\,b}{DC.DA},\quad A'B' = \frac{k\,c}{DA.DB};$$

d'où la relation

$$(1)\qquad -a^2.\overline{DA}^2 + b^2.\overline{DB}^2 + c^2.\overline{DC}^2 = 0,$$

qui représente une sphère (S_1) dont le centre co

ïncide avec le pôle A_1 de BC, de coordonnées barycentriques $-a^2$, b^2, c^2 par rapport au cercle circonscrit (O_1), de centre O_1, au triangle T. Cette sphère qui constitue le lieu des points D tels que le triangle $A'B'C'$ soit rectangle en A', passe par les points B et C dont les distances DA, DB, DC vérifient l'égalité (1) et le cercle (A_1) de centre A_1 et de rayon

$$\pm \frac{abc}{b^2+c^2-a^2} = \pm \frac{a}{\cos A},$$

en est un grand cercle tangent aux rayons O_1B et O_1C du cercle (O_1) en B et C.

Quand le point D est assujetti à rester dans le plan du triangle T, *la condition nécessaire et suffisante pour que le triangle* $A'B'C'$ *soit rectangle en* A', *est que le point* D *décrive la circonférence* (A_1).

N. B. Dans un tétraèdre $P \equiv ABCD$, A_1, A_2, A_3 étant les pôles des arêtes BC, CD, DB pour les cercles $(O_1) \equiv ABC$, $(O_2) \equiv ACD$, $(O_3) \equiv ABD$, P′ et P″ les points d'intersection de sphères S_1 $(A_1, A_1B = A_1C)$, $S_2(A_2, A_2C = A_2D)$, S_3 $(A_3, A_3B = A_3D)$, les inversions (P', k), (P'', k) transforment le tétraèdre P en des tétraèdres $T' \equiv A'B'C'D'$, $T'' \equiv A''B''C''D''$ trior thogonaux en A' et A''.

Les sphères S_1, S_2, S_3 sont tangentes respectivement aux deux rayons OB et OC, et OC OD et OB en B et C, et D, D et B de la sphère (O) circonscrite à T qu'elles coupent orthogonalement. Les points A' et A'' partagent harmoniquement le diamètre de la sphère (O) perpendiculaire au plan $A_1A_2A_3$.

On détermine de la même manière trois autres couples de tétraèdres triorthogonaux analogues à T′ et T″ associés aux sommets B, C, D de T.

B. En vertu de (1) et si l'on pose $DA = a'$, $DB = b'$, $DC = c'$ les arêtes du tétraèdre $P \equiv ABCD$ vérifient la relation

$$(2) \qquad (a\,a')^2 = (b\,b')^2 + (c\,c')^2.$$

Ce tétraèdre spécial construit en transformant par une inversion les sommets d'un triangle rectangle $A'B'C'$ en prenant pour pôle un point D extérieur à son plan, possède des propriétés intéressantes.

1. Lemme. *Les sections antiparallèles dans chacun des trièdres sont des triangles rectangles dont les sommets de l'angle droit sont sur les arêtes* BC *et* DA.

Car les sections antiparallèles sont semblables au triangle *associé* au tétraèdre T dont les longueurs des côtés sont proportionnelles à $a\,a'$, bb', $c\,c'$. Les sommets des angles droits des sections antiparallèles dans les trièdres B et C sont sur l'arête BC et ceux des sections antiparallèles relatives aux trièdres D et A sont situés sur l'arête DA.

2. 1°) Si V est le volume de ce tétraèdre T et R le rayon de la sphère circonscrite, désignant par S la surface du triangle dont les côtés ont pour valeurs numériques $a\,a'$, $b\,b'$ $c\,c'$, on a

$$6\,VR = S. \qquad \text{(von } \textit{Standt}\text{)}$$

Or, dans le cas actuel,

$$S = \frac{1}{2}\,b\,b'\,c\,c' \quad , \text{ d'où} \qquad 12\,VR = b\,b'\,c\,c',$$

et en vertu de (2),

$$288\,V^2R^2 = (a\,a')^4 - (b\,b')^4 - (c\,c')^2.$$

2°) Désignant suivant l'usage par a et a', ..., les dièdres suivant les arêtes BC et DA, ..., par d, d', d'' et α, β, γ les plus courtes distances et les angles des arêtes BC et DA, CA et DB, AB et DC, on a

$$(\sin a \sin a')^2 = (\sin b \sin b')^2 + (\sin c \sin c')^2$$

et

$$\left(\frac{1}{d \sin \alpha}\right)^2 = \left(\frac{1}{d' \sin \beta}\right)^2 + \left(\frac{1}{d'' \sin \gamma}\right)^2.$$

3. Théorème. *Les faces* CDA *et* DAB *sont conjuguées par rapport à la sphère circonscrite au tétraèdre* T *ainsi que les faces* ABC *et* BCD.

En effet, le plan (π) tangent à la sphère (O) circonsrite au sommet A du tétraèdre coupe les plans des faces CDA et DAB suivant deux droites rectangulaires Δa et $\Delta' a$, *(lemme)*. Or, la droite B_1A qui joint le pôle B_1 de la face CDA, par rapport à la spère (O), au sommet A, est située dans le plan (π) où elle est perpendiculaire à la tangente en A au cercle circonscrit au triangle CDA, située également dans la plan (π), c'est-à-dire à la droite Δa. Donc B_1A se confond avec $\Delta' a$.

Dès lors, le pôle B_1 de CDA pour la sphère circonscrite au tétraèdre est dans le plan de la face DAB et le pôle C_1 de celle-ci dans le plan CDA. De même, le pôle D_1 de ABC est dans

le plan de la face B C D et le pôle A_1 de celle-ci dans le plan A B C.

Corollaire. *Le tétraèdre* T *et son tétraèdre tangentiel* $T_1 \equiv A_1B_1C_1D_1$ *sont chacun inscrit à l'autre.*

N. B. Les sommets A_1 et D_1, B_1 et C_1 de T_1 se confondent avec les pôles des arêtes B C et D A pour les cercles circonscrits aux faces A B C et B C D, D A B et C D A.

4. Dans l'hypothèse où le centre D de l'inversion (D, *k*), (A), est dans le plan du triangle A'B'C', les côtés du quadrangle D A B C vérifient la relation

$$(a\,a')^2 = (b\,b')^2 + (c\,c')^2$$

et *les angles opposés* D *et* A *sont complémentaires et réciproquement*[1]. En outre, *les triangles podaires de chacun des sommets du quadrangle* A B C D, *par rapport aux triangles des trois autres sommets, sont rectangles, les sommets de l'angle droit étant sur* B C *et* D A *et les hypoténuses de ces triangles sont inversement proportionnelles aux rayons des cercles circonscrits aux triangles ayant trois sommets communs avec le quadrangle*[2].

Les triangles podaires sont, en effet, semblables au triangle *associé* au quadrangle A B C D, dont les longueurs des côtés sont proportionnelles à $a\,a'$, $b\,b'$ $c\,c'$.

NOTE MATEMATICE

21. — *Generalizarea problemei 2342* (R. M. T. XXVI p. 62).

Fie $\Delta_n(y)$ determinantul circular de ordinul *n* format cu elementele $y_i (i = 1, 2, \ldots n)$. Ne propunem să calculăm valoarea acestui determinant când

$$y_i = x_i^2 - S_2^{x_i},$$

$S_2^{x_i}$ fiind suma combinațiilor, luate câte două, a elementelor $x_1, x_2, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n$.

Se știe că[3]

$$(1)\quad \Delta_n(y_i) = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} F_1(y_i)\,F_2(y_i)\ldots F_n(y_i),$$

în care

$$F_k(y_i) = \alpha_k\,y_1 + \alpha_k^2\,y_2 + \cdots + \alpha_k^n\,y_n,$$

α_k $(k = 1, 2, \ldots n)$ fiind rădăcinile ecuației $x^n - 1 = 0$.

Remarcăm că

$$F_k(x_i^2 - S_2^{x_i}) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\,F_k(x_i),$$

adică

$$(2)\quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_k^i (x_i^2 - S_2^{x_i}) = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_k^i\,x_i\right],$$

pentru toate rădăcinile α_k în afară de $\alpha_k = 1$.

In adevăr, în prima parte a egalității (2) un termen oarecare $x_p\,x_q$ va avea ca factor

$$A_{p\,q} = -\alpha_k^1 - \alpha_k^2 - \cdots - \alpha_k^n + \alpha_k^p + \alpha_k^q,$$

deci

$$A_{p\,q} = \alpha_k^p + \alpha_k^q$$

tocmai factorul ce rezultă din a doua parte.

Ținând seama de relațiile (1) și (2) rezultă

$$\Delta_n(x_i^2 - S_2^{x_i}) = (\Sigma x_i)^{n-2}\left[\Sigma x_i^2 - (n-2)\Sigma x_i\,x_j\right]\Delta_n(x_i)$$

care în cazul $n = 3$ devine

$$\Delta_3(x_i^2 - S_2^{x_i}) = (x_1 + x_2 + x_3)\times$$
$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1)\,\Delta_3(x_i),$$
$$\Delta_3(x_i^2 - S_2^{x_i}) = [\Delta_3(x_i)]^2.$$

MIRCEA ADAM

22. — *Relații între razele cercurilor exinscrise și raza cercului înscris într'un triunghiu dreptunghic.*

Dacă notăm cu *a*, *b*, *c* respectiv ipotenuza și cele două catete ale unui triunghiu dreptunghic A B C, avem în virtutea teoremei lui *Pitagora*, următoarea relație

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Această relație se mai poate scrie și astfel:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{c}{a-b}.$$

Aplicând acestei proporții diferite proprietăți ale proporțiilor, obținem relații noui, care leagă laturile triunghiului dreptunghic A B C între ele. Reținem următoarele relații:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{c}{a-b} = \frac{a+b+c}{a-b+c} = \frac{a+b-c}{-a+b+c}.$$

Amintim că razele cercurilor exinscrise și raza cercului înscris într'un triunghiu sunt date de formulele

---

[1]) Cfr. *V. Thébault, Mathésis* 1931—200.
[2]) Cfr. *J. Neuberg, Mathésis* 1891—82.
[3]) *Th. Angheluță.* Algebra Superioară 1943 I p. 91.

$$r_a = \frac{s}{p-b},\ r_b = \frac{s}{p-b},\ r_c = \frac{s}{p-c},\ r = \frac{s}{p}.$$

De aici,

$$-a+b+c = \frac{2s}{r_a};\ a-b+c = \frac{2s}{r_b};$$

$$a+b-c = \frac{2s}{r_c};\ a+b+c = \frac{2s}{r}.$$

Luând câte două din rapoartele egale stabilite mai sus, aplicându-le unele proprietăți ale proporțiilor și ținând seama de relațiile care leagă r, r_a, r_b, r_c de suprafața și laturile triunghiului A B C, vom obține relații interesante, care stabilesc legături între razele cercurilor exinscrise și raza cercului înscris în triunghiul dreptunghic A B C.

Astfel, luăm din șirul de patru rapoarte egale, primul raport și al treilea, și le aplicăm proprietăți cunoscute ale proporțiilor

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a+b+c}{a-b+c};\ \frac{a+b+c}{a+b-c} = \frac{(a+b+c)+(a-b+c)}{(a+b+c)-(a-b+c)}$$

Ultima egalitate se mai poate scrie

$$\frac{\frac{2s}{r}}{\frac{2s}{r_c}} = \frac{\frac{2s}{r}+\frac{2s}{r_b}}{\frac{2s}{r}-\frac{2s}{r_b}},\ \text{sau mai departe}\ \frac{r_c}{r} = \frac{r+r_b}{r_b-r}$$

$$r_b r_c - r r_c = r(r+r_b)$$

$$\boxed{r_b r_c = r(r+r_b+r_c)}. \tag{1}$$

Luăm apoi primul raport și ultimul

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a+b-c}{-a+b+c};\ \frac{a+b+c}{a+b-c} = \frac{(a+b-c)+(-a+b+c)}{(a+b-c)-(-a+b+c)},$$

$$\frac{\frac{2s}{r}}{\frac{2s}{r_c}} = \frac{\frac{2s}{r_c}+\frac{2s}{r_a}}{\frac{2s}{r_c}-\frac{2s}{r_a}},\ \text{sau încă}\ \frac{r_c}{r} = \frac{r_a+r_c}{r_a-r_c}$$

$$\boxed{r_c^2 = r_a r_c - r(r_a+r_c).}. \tag{2}$$

Luăm raportul al doilea și al treilea și lucrăm ca mai sus

$$\frac{c}{a-b} = \frac{a+b+c}{a-b+c};\ \frac{a-b+c}{-a+b+c} = \frac{(a+b+c)+(a-b+c)}{-(a-b+c)+(a+b+c)},$$

$$\frac{\frac{2s}{r_b}}{\frac{2s}{r_a}} = \frac{\frac{2s}{r}+\frac{2s}{r_b}}{\frac{2s}{s}-\frac{2s}{r_b}},\ \text{adică}\ \frac{r_a}{r_b} = \frac{r+r_b}{r_b-r}$$

$$r_a r_b - r r_a = r r_b + r_b^2$$

$$\boxed{r_b^2 = r_a r_b - r(r_a+r_b)}. \tag{3}$$

Luăm raportul al doilea și al patrulea

$$\frac{c}{a-b} = \frac{a+b-c}{-a+b+c};\ \frac{a-b+c}{-a+b+c} = \frac{(a+b-c)+(-a+b+c)}{(a+b-c)-(-a+b+c)},$$

$$\frac{\frac{2s}{r_b}}{\frac{2s}{r_a}} = \frac{\frac{2s}{r_c}+\frac{2s}{r_a}}{\frac{2s}{r_c}-\frac{2s}{r_a}},\ \text{adică}\ \frac{r_a}{r_b} = \frac{r_a+r_c}{r_a-r_c}$$

$$\boxed{r_a^2 = r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a} \tag{4}$$

Luând acum ultimele două rapoarte egale

$$\frac{a+b+c}{a-b+c} = \frac{a+b-c}{-a+b+c},\ \frac{\frac{2s}{r}}{\frac{2s}{r_b}} = \frac{\frac{2s}{r_c}}{\frac{2r}{r_a}},\ \text{adică}\ \frac{r_b}{r} = \frac{r_a}{r_c},$$

$$\boxed{r_a r = r_b r_c}. \tag{5}$$

Se observă ușor că relația (1) și relația (5) au un membru identic. Atunci

$$r_b r_c = r r_a = r(r+r_b+r_c).$$

$$r_a = r+r_b+r_c$$

$$\boxed{r_a - r = r_b + r_c}. \tag{6}$$

Prin adunarea a două sau trei din cele șase relații stabilite mai sus, deducem o altă serie de relații. Astfel adunând relația (4) cu relația (3), relațiile (3) și (2), relațiile (2) și (4), precum și relațiile (2), (3) și (4) obținem următoarele patru relații noui:

$$r_a^2 + r_b^2 = 2 r_a r_b + r_c(r_a+r_b) - r(r_a+r_b).$$

$$\boxed{(r_a-r_b)^2 = (r_a+r_b)(r_c-r)} \tag{7}$$

$$\boxed{r_b^2+r_c^2 = r_a(r_b+r_c) - r(2r_a+r_b+r_c)} \tag{8}$$

$$\boxed{(r_a-r_c)^2 = (r_a+r_c)(r_b-r)} \tag{9}$$

$$\boxed{r_a^2+r_b^2+r_c^2 = 2r_a(r_b+r_c)+r_b r_c - r(2r_a+r_b+r_c)} \tag{10}$$

Luăm și scădem din relația (1) relația (5)

$$\begin{cases} r_b r_c = r(r+r_b+r_c) \\ r r_a = r_b r_c \end{cases}$$

$$r_b r_c - r r_a = r(r+r_b+r_c) - r_b r_c$$

$$\boxed{2 r_b r_c = r(r+r_a+r_b+r_c)} \tag{11}$$

Se mai pot găsi şi relaţii care au o formă deosebită de forma celor stabilite mai sus, însă dacă se fac simplificările şi reducerile posibile, ele ne conduc la una din relaţiile de mai sus. Spre exemplificare: Din relaţia (3) scoatem valoarea lui r

$$r = \frac{r_b(r_a - r_b)}{r_a + r_b}$$

şi o introducem în relaţia (2) obţinem:

$$\frac{r_b(r_a - r_b)}{r_a + r_b}(r_a + r_c) = r_c(r_a - r_c)$$

$$(12) \quad \boxed{r_b(r_a - r_b)(r_a + r_c) = r_c(r_a - r_c)(r_a + r_b)}$$

Această relaţie însă, desvoltată şi făcându-se reducerile şi simplificările posibile, ne conduce la relaţia (4).

IOAN I. NOVAC

---

23. — *Asupra unor relaţii trigonometrice.*

In „Exercices de Trigonométrie par F. G. M. 1915 pag. 167, găsim relaţiile:

$$(\alpha) \quad \begin{cases} 2r' = R(1 - \cos A) \\ 2r'' = R(1 - \cos B) \\ 2r''' = R(1 - \cos C) \end{cases}$$

de unde:

$$(\beta) \quad 8r'r''r''' = 8R^3 \sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} = \frac{8R^3S^4}{p^2a^2b^2c^2}$$

şi deci:

$$(\gamma) \quad 64\,R\,r'r''\,r''' = \frac{64\,R^4S^4}{p^2a^2b^2c^2} = \frac{a^2b^2c^2}{4p^2} = \left(\frac{abc}{a+b+c}\right)^2,$$

pentru un triunghiu oarecare; relaţiile (β) şi (γ) rezultând din (α). Dar relaţiile (α) *nu sunt adevărate pentru nici un triunghiu.*

Intr'adevăr:

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{a}{4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}, \text{ iar : } 1 - \cos A = 2\sin^2\frac{A}{2}.$$

Deci:

$$2r' = \frac{a \cdot 2\sin^2\frac{A}{2}}{4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2};$$

se ştie însă că: $2r' = 2p\operatorname{tg}\frac{A}{2}$; va trebui să avem: $\frac{a}{2} = 2p$, egalitate imposibilă pentru orice triunghiu. Deci, nici relaţiile (β) şi (γ) *nu sunt posibile.*

PETRE TEODORESCU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul LII, Nr. 1, Septembrie 1946. Lista membrilor Societăţii, „Gazeta Matematică". Asupra unei ecuaţii algebrice de *N. Goiu.* Proprietăţi ale punctelor izogonale de pe diametrele cercului circumscris unui triunghiu, de G-l *Gh. I. Popescu.* Premiile şi publicaţiile Societăţii „Gazeta Matematică", de *Al. Roşu* şi *D. Stan.* Donaţii pentru „Gazeta Matematică". Concursul „Gazetei Matematice" pentru 1947. Raport pentru acordarea premiului „General *Scarlat Panaitescu*", de Ing. *Al. Bunescu,* L-t Col. *Ed. Dragomirescu-Buzne,* Lt. C-dor Ing. *Aurelian Stan.* Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. *A. Gloden. Two* theorems on multi-degree equalties. (Translated from the french by *H. L. Dorwart.*

PROBLEME REZOLVATE

Problema 2112. — *Fie* $R > R'$ *razele a două cercuri de centre* O, O' *şi* α, β *unghiurile pe care le face* OO' *cu tangenta comună exterioară şi interioară la cele două cercuri. Să se demonstreze că*

$$1^0. \qquad R\operatorname{tg}\frac{\beta - \alpha}{2} = R'\operatorname{tg}\frac{\beta + \alpha}{2}$$

$$2^0. \qquad (R + R')\sqrt{d^2 - (R + R')^2}\sin 2\alpha = (R - R')\sqrt{d^2 - (R - R')^2}\sin 2\beta.$$

G-L. GH. BUICLIU

Soluţie. Notăm cu D, E intersecţia lui OO' cu tangenta interioară DBB' şi cu tangenta exterioară EAA'. Se vede pe figură că

$$(1) \quad d = OO' = OD + DO' = \frac{R}{\sin\beta} + \frac{R'}{\sin\beta} = \frac{R + R'}{\sin\beta}$$

$$(2) \quad d = OO' = OE - O'E = \frac{R}{\sin\alpha} - \frac{R}{\sin\alpha} = \frac{R - R'}{\sin\alpha}$$

$$\therefore \quad \frac{R + R'}{\sin\beta} = \frac{R - R'}{\sin\alpha}$$

$$(3) \quad \therefore R'(\sin\alpha + \sin\beta) = R(\sin\beta - \sin\alpha)$$

$$\therefore 2R'\sin\frac{\beta+\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2} = 2R\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\alpha}{2}$$

$$\therefore R\operatorname{tg}\frac{\beta - \alpha}{2} = R'\operatorname{tg}\frac{\beta + \alpha}{2}.$$

2°. Inmulţim pe (3) cu $2\cos\alpha\cos\beta$ şi obţinem

(4) $(R+R')\sin 2\alpha\cos\beta=(R-R')\sin 2\beta\cos\alpha.$

Dar din (1) şi (2) se scoate

$$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\frac{\sqrt{d^2-(R+R')^2}}{d}$$

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{\sqrt{d^2-(R-R')^2}}{d}$$

care duse în (4) dau a doua relaţie din enunţ.

Soluţii analoage au trimis D-nii: *Anton Ioan, Bitang Alex., Gligor N. Ioan. Muţiu S. Antim, Pat I. M., Sabău Gh. Mihai* (P. T); *Enăchescu Gr. Ioan, Pălăceanu D. Vasile* (Lic. mil. Timişoara); *Eugen Wegener* (Bucureşti).

Problema 2381. — *Să se determine constantele a, b, λ astfel ca derivata funcţiei*

$$y=\frac{ax^3+b+9\lambda}{x-2}-5\operatorname{arc\,tg}\frac{x+2}{x-2}+\mathrm{L}\left(\frac{x^2+4}{x-2}\right)^{5\lambda},$$

să se anuleze pentru $x=-1$, $x=0$, şi $x=1$.

*Să se afle toate rădăcinele derivatei, după ce în prealabil s'au înlocuit a, b, λ cu valorile găsite. (*L *înseamnă logaritm neperian).*

V. ALACI

Soluţie. Derivând funcţia dată avem succesiv

$$y'=\frac{3ax^2(x-2)-ax^3-b-9\lambda}{(x-2)^2}-\frac{5}{1+\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2}\cdot\frac{x-2-x-2}{(x-2)^2}+5\lambda\cdot\frac{x-2}{x^2+4}\cdot\frac{2x(x-2)-x^2-4}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{2ax^3-6ax^2-b-9\lambda}{(x-2)^2}+\frac{10}{x^2+4}+\frac{5\lambda(x^2-4x-4)}{(x^4+4)(x-2)}$$

$$=\frac{(2ax^3-6ax^2-b-9\lambda)(x^2+4)+10(x-2)^2+5\lambda(x-2)(x^2-4x-4)}{(x^2+4)(x-2)^2}$$

$$=\frac{2ax^5-6ax^4+(8a+5\lambda)x^3-(24a+b+39\lambda-10)x^2+20(\lambda-2)x-4b+4\lambda+40}{(x^2+4)(x-2)^2}.$$

Scriind condiţiile ca derivata să se anuleze pentru $x=-1$, $x=0$, $x=1$, găsim după unele simplificări, că a, b, λ trebue să satisfacă sistemul

(1) $$\begin{cases}8a+b+12\lambda=18\\ b-\lambda=10\\ 4a+b+2\lambda=2.\end{cases}$$

Să rezolvăm acest sistem. Scăzând ecuaţia 2-a din prima şi din a 3-a, obţinem

$$\begin{cases}8a+13\lambda=8\\ 4a+3\lambda=-8.\end{cases}$$

Scăzând din prima din aceste relaţii, ecuaţia 2-a înmulţită cu 2, găsim

$$7\lambda=24,$$

deci

$$\lambda=\frac{24}{7}.$$

Această valoare înlocuită în a 2-a ecuaţie din 1) ne dă

$$b=10+\frac{24}{7}=\frac{94}{7}.$$

Valorile găsite pentru b şi λ introduse în ecuaţia 3-a din (1) ne dă

$$4a=2-\frac{94}{7}-\frac{48}{7}=-\frac{32}{7},$$

deci

$$a=-\frac{32}{7}.$$

Sistemul (1) este astfel satisfăcut pentru

(1′) $$a=-\frac{32}{7},\qquad b=\frac{94}{7},\qquad \lambda=\frac{24}{7}.$$

Inlocuind aceste valori în ultima expresie a derivatei, aducând la acelaşi numitor şi simplificând, obţinem

$$y'=\frac{-64x^5+192x^4-136x^3+192x^2+200x}{7(x^2+4)(x-2)^2}$$

Cum numărătorul din y' a fost determinat în condițiile ca el să se anuleze pentru $x=-1$, $x=0$, $x=1$, rezultă că el se divide prin

$$(x+1)\,x\,(x-1)=x\,(x^2-1).$$

Deci, $-64\,x^4+192\,x^3+136\,x^2+192\,x+200$ se divide prin x^2-1.

Efectuând împărțirea găsim câtul

$$-8\,(8\,x^2-24\,x+25).$$

Prin urmare y' se poate scri sub forma,

$$y'=\frac{-8\,x\,(x^2-1)\,(8x^2-24\,x+25)}{7\,(x^2+4)\,(x-2)}.$$

Rădăcinele derivatei, cerute prin enunț, sunt prin urmare

$$x=-1,\quad x=0,\quad x=1,$$

precum și rădăcinele ultimului factor din numărătorul lui (2), anume

$$x=\frac{6\pm i\sqrt{14}}{4},\qquad (i=\sqrt{-1}).$$

Soluții date de d-nii: *Balaniscu Chirică* (student, Cluj), *Bălteanu Gh.* (student), *Beşchea Radu* (P. B), *Brasch Andrei* (P. T.), *Coman Liviu* P. T.), *Coțiu Aurel* (Bihor), *Dobrișan Alexandru* (P. T.), *Domilescu Eugeniu* (P. T.), *Ellman Morel* (P. T.), *Frunză Radu* (P. T.), *Gancea Constantin Giurconiu Mihai* (P. T.), *Ghiciu Vasile*, (P. T.), *Guttmann Tiberiu* (Lic. Deva); *Mărginean Ioan* (Lic. Blaj), *Nedelcu Ulpius* (Șc. Of. de Geniu București), *Novac Ioan* (Lic. Brăila), *Plângu Ion* (Lic. Tulcea), *Podracky Valer*.(Colegiu Loga Timișoara), *Popa Vasile* (P. T.), *Popescu D-tru* (P. T.), *Rohrlich Alfred* (P. T.), *Serengău Mihai* (P. T.), *Sin Gh.* (student), *Stroescu Florea* (Liceul Caracal), *Tincu C-tin* (P. T.), și *Titero Ioan* (P. T.).

Problema 2389. — *Să se determine a și b astfel ca polinomul*

$$P(x)=a\,x^4+b\,x^3-5\,x^2+9\,x-2$$

să fie divizibil prin x^2+x-2.

Inlocuind pe a și b cu valorile găsite, să se rezolve ecuația $P(x)=0$. *Fie* x_1 și x_2 *rădăcinele întregi ale ecuației astfel ca* $x_1>x_2$.

Considerăm cercul ce trece prin originea axelor de coordonate și prin punctele $A\,(2\,x_1,\ x_2)$ *și* $B\,(0,\alpha)$. *Să se găsească locul geometric al intersecției tangentelor la cerc în punctele* A *și* B.

V. D. Popa

Soluție. Fiindcă $x^2+x-2=(x-1)\,(x+2)$, rezultă că $P(x)$ se divide prin $x-1$ și $x+2$, deci se anulează pentru $x=1$ și $x=-2$ și punând aceste condiții, obținem

$$\begin{cases} a+b-5+9-2=0\\ 16\,a-8\,b-20-18-2=0,\end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} a+b=-2\\ 2\,a-b=2\,.\end{cases}$$

De aci deducem

$$a=1,\quad b=-3.$$

Polinomul cerut este prin urmare

$$P(x)=x^4-3\,x^3-5\,x^2+9\,x-2.$$

Impărțind acest polinom prin factorul x^2+x-2, pe care știm că îl admite, găsim câtul x^2-4x+1, astfel că putem scri

$$P(x)=(x^2+x-2)\,(x^2-4\,x+1).$$

Rezultă de aci, că rădăcinele acestui polinom sunt rădăcinele factorilor săi, anume

$$x_1=1,\quad x_2=-2,\quad x_{3,4}=2\pm\sqrt{3}\,.$$

Trecem acum la a 2-a parte a problemei.

Fiindcă $x_1>x_2$, rezultă că cercul cerut trece prin punctele $A\,(2,-2)$, $B\,(0,\alpha)$ și origina $O\,(0,0)$. Dar ecuația unui cerc care trece prin origină este

$$x^2+y^2-2\,a\,x-2\,b\,y=0. \tag{1}$$

Scriind că acest cerc trece și prin punctele A și B, găsim condițiile

$$\begin{cases} 4+4-4\,a+4\,b=0\\ \alpha^2-2\,b\,\alpha=0\,,\end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} a-b=2\\ \alpha\,(\alpha-2\,b)=0\,.\end{cases}$$

Rezolvind acest sistem în raport cu a și b, obținem

$$b=\frac{\alpha}{2},\qquad a=\frac{4+\alpha}{2}.$$

Inlocuind aceste valori în (1), avem cercul

$$x^2+y^2-(4+\alpha)\,x-\alpha\,y=0.$$

Ecuațiile tangentelor la acest cerc în punctele $A\,(2,-2)$, $B\,(0,\alpha)$, după cum se știe, se pot scri imediat, ele sunt

$$\begin{cases} 2\,x-2\,y-\dfrac{4+\alpha}{2}\,(x+2)-\dfrac{\alpha}{2}\,(y-2)=0\\[2ex] \alpha\,y-\dfrac{4+\alpha}{2}\,x-\dfrac{\alpha}{2}\,(y+\alpha)=0,\end{cases}$$

sau aducând la forma întreagă, găsim

$$(2)\qquad \begin{cases} \alpha x+(\alpha+4)y+8=0 \\ (\alpha+4)x-\alpha y+\alpha^2=0. \end{cases}$$

Coordonatele punctului de intersecţie al tangentelor, se obţin rezolvind sistemul (2). Aplicând regula lui *Cramer* sistemului (2) găsim

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -8 & 4+\alpha \\ -\alpha^2 & -\alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & 4+\alpha \\ 4+\alpha & -\alpha \end{vmatrix}}=\frac{\alpha(\alpha^2+4\alpha+8)}{-2(\alpha^2+4\alpha+8)}=-\frac{\alpha}{2}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} \alpha & -8 \\ 4+\alpha & -\alpha^2 \end{vmatrix}}{-2(\alpha^2+4\alpha+8)}=\frac{-(\alpha-4)(\alpha^2+4\alpha+8)}{-2(\alpha^2+4\alpha+8)}=\frac{\alpha-4}{2}.$$

Prin urmare, coordonate intersecţiei tangentelor sunt:

$$x=-\frac{\alpha}{2},\qquad y=\frac{\alpha-4}{2}.$$

Eliminând parametru α între aceste relaţii, obţinem

$$(3)\qquad x+y+2=0.$$

Locul geometric cerut este astfel dreapta (3), paralelă cu bisectoarea a 2-a a axelor de coordonate.

Soluţii date de d-nii: *Balaniscu Chirică* (student, Cluj), *Brasch Andrei* (P. T). *Coţiu Aurel* (student, Cluj), *Cristea Mircea* (P. T.), *Dobrişan Alexandru* (P. T), *Fleşeriu Eugeniu* (Alba-Iulia), *Frunză Radu* (P. T.), *Giurconiu Mihai* (P. T.), *Goldiş Gh.* (P. T.), *Ilea Vasile* (P. T.), *Janţa Vasile* (P. T.), *Macavei Eugen* (P. T.), *Novac Ioan* (Liceul Brăila), *Opalschi Mihai* (P. T.), *Petrovici Adalbert* (P. T.), *Popovici Dan* (P. T.) şi *Rohrlich Alfred* (P., T.).

Problema 2391. — *Să se arate că derivatele succesive ale funcţiei y definită de relaţia*

$$e^y=(\sin x)^{\sin x},$$

verifică ecuaţia

$$(y^{IV}+y'')\operatorname{tg}^2 x+(y'''+y')\operatorname{tg}^3 x=2\operatorname{cosec} x.$$

C-PT. MIRCEA GRUMĂZESCU

Soluţie. Luând logaritmii neperieni în ambii membri ai relaţiei date, deducem

$$y=\sin x\,.\,\mathrm{L}\,\sin x.$$

Derivând succesiv, obţinem

$$y'=\cos x\,\mathrm{L}\sin x+\sin x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=\cos x(1+\mathrm{L}\sin x).$$

$$y''=-\sin x-\sin x.\mathrm{L}\sin x+\frac{\cos^2 x}{\sin x}=\frac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x-y$$

$$y'''=\frac{-2\cos x\sin^2 x-\cos^3 x}{\sin^2 x}-\cos x-y'$$

$$=-\cos x\,\frac{1+2\sin^2 x}{\sin^2 x}-y'$$

$$y^{IV}=\frac{1+2\sin^2 x}{\sin x}+\frac{2\cos^2 x}{\sin^3 x}-y''.$$

Introducând valorile derivatelor aflate în primul membru al ecuaţiei cerută a fi verificată, avem

$$\left(\frac{1+2\sin^2 x}{\sin x}+\frac{2\cos^2 x}{\sin^3 x}\right)\operatorname{tg}^2 x-\frac{\cos x(1+2\sin^2 x)}{\sin^2 x}\operatorname{tg}^3 x$$

$$=\frac{\sin x(1+2\sin^2 x)}{\cos^2 x}+\frac{2}{\sin x}-\frac{\sin x(1+2\sin^2 x)}{\cos^2 x}=$$

$$\frac{2}{\sin x}=2\operatorname{cosec} x.$$

Astfel ecuaţia dată este verificată.

Soluţii date de d-ra: *Costin Alexandrina* (P. T.) şi de d-nii: *Balaniscu Chirică* (student, Cluj), *Beşchea Radu* (P. B.), *Birănaş Ioan* (P. T.), *Brasch Andrei* (P. T.), *Coman Liviu* (P. T.), *Constantinescu Ilie* (P, T.), *Coţiu Aurel* (student, Cluj), *Cristea Mircea* (P. T.), *Dobrişan Alexandru* (P. T.), *Domilescu Eugen* (P. T.), *Frunză Radu* (P. T.), *Giurconiu Mihai* (P. T.), *Gligor Ioan* (student, Cluj), *Goldiş Gh.* (P. T.), *Hagiu Ilie* (P. T.), *Ilea Vasile* (P. T.), *Janţă Vasile* (P. T.), *Moldovan Mircea*, *Novac Ioan* (Lic. Brăila), *Pali Sergiu* (P. T), *Popa Vasile* (P. T.), *Popescu D-tru* (P. T.), *Popovici Dan* (P. T.), *Serengău Mihai* (P. T.), *Schiopu Ioan* (P. T.), *Stern Tiberiu* (P.T.), *Tincu C-tin* (P. T.) şi *Titero Ioan* (P. T.).

Problema 2393. — *Să se verifice că într'un triunghiu oarecare avem relaţia*

$$\sum\left(\frac{\sin^2\frac{A}{2}+\operatorname{cosec}^2\frac{A}{2}}{\sec^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}\;\frac{4-\sin^2 A}{5\sin^2 A-2\cos A+6\cos^2 A}\right)$$

$$=\prod\operatorname{cotg}^2\frac{A}{2}-\sum\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}.$$

AL. TIGANOIU

Soluţie. Insemnând cu α expresia din paranteza din primul membru şi ţinând seamă de unele formule curente din trigonometrie, putem scri succesiv

$$\alpha=\frac{\frac{1-\cos A}{2}+\frac{2}{1-\cos A}}{\frac{2}{1+\cos A}+\frac{1-\cos A}{2}}\cdot\frac{4-(1-\cos^2 A)}{5(\sin^2 A+\cos^2 A)-2\cos A+\cos^2 A}$$

$$=\frac{5-2\cos A+\cos^2 A}{2(1-\cos A)}\cdot\frac{2(1+\cos A)}{3+\cos^2 A}\cdot\frac{3+\cos^2 A}{5-2\cos A+\cos^2 A}$$

$$= \frac{1+\cos A}{1-\cos A} = \frac{2\cos^2\frac{A}{2}}{2\sin^2\frac{A}{2}} = \operatorname{cotg}^2\frac{A}{2}.$$

Deci membrul întâi al relației din enunț, se poate scri,

(1) $$\sum \operatorname{cotg}^2\frac{A}{2} = \operatorname{cotg}^2\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}^2\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}^2\frac{C}{2}.$$

Pe de altă parte ridicând la patrat identitatea cunoscută (F. G. M. p 60),

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}.$$

avem

$$\operatorname{cotg}^2\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}^2\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}^2\frac{C}{2} +$$

$$2\sum \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2} = \prod \operatorname{cotg}^2\frac{A}{2}.$$

De aci rezultă,

$$\sum \operatorname{cotg}^2\frac{A}{2} = \prod \operatorname{cotg}^2\frac{A}{2} - 2\sum \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}$$

și astfel identitatea dată este stabilită.

Soluții date de d-nii: *Bălăuță Mihai* (Lic. Deva), *Birănaș Ioan* (P. T.), *Bogza Mihai*, *Brasch Andrei* (P. T.), *Brașoveanu Gh.* (Craiova) *Constantinescu Ilie* (P. T.), *Filimon Ioan* (Lic. Deva), *Giurconiu Mihail* (P. T.), *Mărcuțiu Silviu*, *Novac Ioan* (Lic. Brăila), *Opriș C-tin* (P.T.), *Popa Vasile* (P. T.), *Popescu D-tru* (P. T.), *Sasu Ion* (P. T.), *Șerengău Mihai* (P. T.), *Stern Tiberiu* (P. T), *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab București), *Tincu C-tin* (P. T.) și *Titero Ioan* (P. T.).

PROBLEME PROPUSE

2456. — Să se găsească un număr de două cifre, astfel ca scriind după el împătritul său și apoi cifra 4, să căpătăm un patrat perfect de cinci cifre.

PETRE TEODORESCU

2457. — Intr'un sistem de numerație de bază B, să se găsească cel mai mic număr de patru cifre $a\,b\,c\,d$ astfel ca suma celor două cifre extreme adunată cu numărul format de celelalte două cifre, să întreacă cu o unitate patratul bazei, și ca numărul $c\,b$ să fie patratul sumei celor două cifre extreme.

V. THÉBAULT

2458. — Să se rezolve ecuația

$$a^2x^4 - a(a+b)x^3 - abx^2 + b(a+b)x + b^2 = 0.$$

IOAN FILIMON

2459. — Să se arate că într'un triunghiu isoscel ($b=c$), avem relația:

$$\frac{b'''\log\operatorname{tg}C - c'''\log\operatorname{tg}B}{b''e^{\operatorname{tg}C} - c''e^{\operatorname{tg}B}} =$$

$$\frac{b'''^{\,n}\cos B}{e^{\operatorname{tg}B}} \cdot \frac{m\cos^2 B\log\operatorname{tg}B - 1}{n\cos^3 B - \sin B}.$$

SERGIU PALI

2460. — Fie ABC un triunghiu dreptunghic cu vârful unghiului drept în punctul dat A, având direcțiile catetelor date și fie P un punct fix pe ipotenuza variabilă BC. Notăm cu M și N mijloacele segmentelor BC și CP, iar cu Q punctul unde paralela dusă din N la AC taie dreapta AM.

Să se arate, că segmentul QN este de lungime constantă, când ipotenuza BC se rotește în jurul punctului P.

MARIA NEUMANN

2461. — Să se construiască un triunghiu cunoscând în plan poziția centrului cercului circumscris acelui triunghiu, o dreaptă Δ pe care este situată o mediană și direcțiile laturilor prin intersecția cărora trece acea mediană.

G-L GH. BUICLIU

2462. — Fie triunghiul BAC dreptunghic în A înscris în cercul O. Bisectoarea din B și înălțimea din A, prelungite, întâlnesc cercul în B_1 și A_1.

Să se calculeze perimetrul și suprafața figurii B, ABA_1 în funcție de laturile triunghiului BAC.

C-PT. G. P. BOERESCU

2463. — Considerăm un fascicol de trei drepte AB, AC, AD, și ducem o perpendiculară pe AC într'un punct M al ei, care întâlnește în M_1, M_2 pe AB, AC.

Fie r_1, r_2 razele cercurilor înscrise în triunghiurile dreptunghice AMM_1, AMM_2 și notăm $\sphericalangle MAM_1 = 2\alpha$, $\sphericalangle MAM_2 = 2\beta$.

Să se stabilească relațiile

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\operatorname{sp}\alpha}{\operatorname{sp}\beta},$$

$$\overline{M_1M_2} = \frac{r_1}{sp(45^0-\alpha)} + \frac{r_2}{sp(45^0-\beta)},$$

$\alpha, \beta > 45^0$.

V. ALACI

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Balaniscu Chirică (2420, 2427, 2450, 2454); *Bălăuţă Mihai* (2424, 2454); *Bogza Mihai* (P; 2271, 2293, 2316, 2399, 2354, 2417, 2420, 2429, 2430); *Braşoveanu Gh.* (2353, 2354, 2366, 2401, 2419, 2429, 2437); *Cernescu Nicolae* (2118, 2362, 2403, 2405, 2406, 2409, 2419, 2424, 2427, 2428, 2429, 2430, 2431, 2452, 2454); *Constantinescu Ilie* (P); *Corduneanu C-tin* (P. 2438); *Costăchescu V. C-tin* (P.); *Coţiu Aurel* (1979, 2370, 2382, 2419, 2424, 2435); *Domilescu Eugeniu* (2323, 2371, 2382, 2404); *Enache Ion* (2449, 2452); *Fleşeriu Eugen* (2323, 2405, 2452, 2454); *Gancea C-tin* (2454); *Giurconiu Mihai* (P; 1570, 1571, 2118, 2435, 2443, 2447, 2448, 2452, 2453, 2454); *Guttman Tiberiu* (1149, 2413, 2429); *Hurezeanu Romulus* (P;), *Jungher Arnold* (2413, 2424, 2427, 2437, 2450, 2452, 2454); *Kaufmann Iosif* (N); *Lebovics Ervin* (2413, 2424, 2435, 2437, 2450, 2452, 2454); *Mărcuţiu Silviu* (P; 2287, 2394, 2395, 2399, 2435, 2450, 2454); *Moldovan Mircea* (2338, 2362, 2390, 2403, 2410, 2413, 2416, 2419, 2420, 2424, 2427, 2435, 2437, 2439, 2448, 2450, 2452, 2454; *Munteanu Ion* (P; 2118, 2362, 2437, 2438, 2439, 2446, 2447); *Nedelcu Ulpius* (2309, 2319, 2375, 2384, 2400, 2413, 2424, 2427, 2429, 2430, 2435, 2438); *Neguţ Ion* (2405); *Pişanca Ionel* (2273, 2279, 2424, 2430, 2448, 2454); *Puşcaşiu Silviu* (P; 2424, 2429, 2450, 2452, 2454); *Stanciu M. Valeriu* (1302, 1859, 1883); *Thébault V.* (N.); *Teodorescu Petre* (N; P; 2118, 2292, 2406, 2433, 2448, 2449, 2450, 2451, 2452, 2453, 2454, 2455).

INFORMAŢIUNI

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, pentru a fi luate în consideraţie, trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Rugăm pe corespondenţii noştrii ca problemele propuse să fie însoţite de soluţiile corespunzătoare.

Legându-se colecţiileR. M. T., anii II-XXV, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 1200 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II—XXV, cu preţul de lei 8000 volumul şi se trimet la cerere.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Se aduce la cunoştinţa că la Politehnica din Timişoara există un post de asistent vacant la Catedra de Geometrie Descriptivă: Cei ce doresc să ocupe acest post se vor adresa D-lui Prof. GH. TH. GHEORGHIU, Politehnică, Timişoara. Li se cere licenţa în Matematici şi dorinţa de a lucra Geometrie Diferenţială.

ANUL XXVI. NOEMBRIE 1946 No. 9.

1946

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNII SIBIIU

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 1000 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 8000 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRĂINĂTATE ESTE DE 20.000 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **MARIA NEUMANN**: ASUPRA UNOR PROPRIETATI ALE IPERBOLEI SI APLICATIILE LOR.
2. NOTE MATEMATICE 24.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 2174, 2302, 2309, 2313, 2319, 2384, 2395.
6. PROBLEME PROPUSE: 2464 - 2471.
7. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timișoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Pentru nouii abonaţi, costul abonamentului pentru anul XXVI (15 Martie 1946 — 15 Februarie 1947) este de 8000 (opt mii) lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale, vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Politehnica Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Politehnica Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Politehnica Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXVI, de 8000 (opt mii) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXV inclusiv, broşate, 8000 lei fiecare.

ANUL XXVI — No. 9. TIMISOARA, NOEMBRIE 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 1000 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 8000 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Politehnica Timișoara.

ASUPRA UNOR PROPRIETĂȚI ALE IPERBOLEI ȘI APLICAȚIILE LOR

de

MARIA NEUMANN

1°. In cele ce urmează, ne vom ocupa de unele proprietăți ale iperbolei plecând dela o anumită definiție a ei.

2°. Această definiție am găsit-o, folosindu-ne de o metodă generală, care se bazează pe observația, că teoremele asupra cercului, independente de mărimea razei, se mențin pentru două drepte concurente. Intr'adevăr printr'o transformare afină convenabilă,[1] un cerc dat se transformă într'o iperbolă. Prin această transformare punctele reale ale planului se transformă în general în puncte imaginare. Fie (C) o curbă asociată cercului dat, care exprimă o proprietate (P) pentru cercul dat, independentă de mărimea razei. Prin transformarea afină, curba (C) se transformă într'o curbă (C′) de același grad, asociat iperbolei și care exprimă o proprietate (P′) corespunzătoare proprietății (P). Dacă raza cercului dat tinde către zero, iperbola degenerează în două drepte concurente, dar poziția și gradul curbei (C′) nu se schimbă. Curba (C′) este asociată acum celor două drepte concurente, pentru care ea exprimă proprietatea (P′).

Spre a putea preciza poziția curbei (C′) ne vom folosi de următoarele proprietăți ale transformării afine:

a) *Centrul conicei se transformă în centru.*

b) *Mijlocul unui segment se transformă în mijlocul segmentului transformat.*

c) *Dreptele paralele se transformă în drepte paralele.*

d) *Doi diametri perpendiculari ai cercului se transformă în doi diametri conjugați, deci la două direcții perpendiculare le corespund direcțiile a doi diametri conjugați.*

3°. Iată câteva exemple, care ne arată eficacitatea metodei din 2°. Vom enunța proprietățile cercului în așa fel, ca să iasă imediat la iveală, că ele nu depind de mărimea razei.

a) *Locul geometric al mijloacelor coardelor paralele la o direcție dată, este o dreaptă perpendiculară pe direcția dată, ce trece prin centru.*

Rezultă că, *locul mijloacelor bazelor unui triunghiu variabil, având două laturi fixe și a treia paralelă la o direcție dată, este mediana comună acestor triunghiuri,* întrucât prin transformarea afină coardelor paralele din cerc le corespund segmente paralele cuprinse între laturile unghiului, în care se transformă iperbola, când raza cercului tinde la zero, iar diametrului perpendicular pe aceste coarde paralele, le corespunde diametrul conjugat, care coincide cu mediana comună a triunghiurilor.

b) *Punctul de intersecție al diagonalelor unui trapez variabil înscris într'un cerc și având bazele paralele cu o direcție dată, este o dreaptă, ce trece prin centru și e perpendiculară pe direcția dată.*

Prin transformarea acestei probleme se obține imediat problema 57 pag. 28 din „Culegerea de probleme de Geometrie Analitică", de *I. Dumitriu*, care se enunță în felul următor:

O dreaptă paralelă cu latura AC *a unui triunghiu, taie celelalte laturi în punctele* P *și* Q. *Dreptele* PC *și* AQ *se întâlnesc pe mediana, ce trece prin* B.

c) *Intr'un cerc dat, fie* PQ *o coardă mobilă, ce trece printr'un punct fix* A. *Locul geometric al simetricului* A′ *al punctului* A *în raport cu mijlocul*

---

[1]) Transformarea afină are forma următoare în coordonate obișnuite:

$$\begin{cases} x = a_1 X + b_1 Y + c_1 \\ y = a_2 X + b_2 Y + c_2 \end{cases}$$

M *al coardei* P Q, *este un cerc ce trece prin* A, *având centrul lui în centrul cercului dat.*

Aplicând transformarea din 2°, se obține următoarea proprietate cunoscută a iperbolei.

Segmentele pe care le determină o iperbolă și asimptotele sale pe o secantă oarecare, au același mijloc.

Intr'adevăr cercul dat se transformă într'o iperbolă (J), iar coarda P Q a cercului devine o coardă $P_1 Q_1$ a iperbolei. $P_1 Q_1$ trece printr'un punct fix A_1 din planul iperbolei. Simetricul A_1' al punctului A_1, în raport cu mijlocul coardei $P_1 Q_1$, descrie o conică (C'), deoarece punctul A' se găsește pe un cerc (C). Cercul (C) trece prin punctul A, deci (C') trece prin A_1. Centrul cercului (C) este centrul cercului dat, deci centrul conicei (C') se află în centrul iperbolei (J). Dacă coarda variabilă $P_1 Q_1$, în mișcarea sa de rotație în jurul punctului A_1 devine paralelă la asimptotele iperbolei (J), atunci A_1' este la infinit. Rezultă că conica (C') este o iperbolă ale cărei asimptote coincid cu asimptotele iperbolei (J). Dacă raza cercului tinde către zero, iperbola (J) degenerează în asimptotele sale. In acest caz, punctele P_1 și Q_1 se găsesc pe două drepte concurente, despre care am văzut, că sunt asimptotele iperbolei (C').

4°. Iată definiția iperbolei, cu aplicațiile căreia ne vom ocupa in articolul acesta:

Fie D_1 *și* D_2 *două drepte concurente în* A, B *un punct dat și fie* P *și* Q *punctele unde o secantă variabilă ce trece prin punctul* B *taie dreptele* D_1 *și* D_2. *Locul geometric al mijlocului* M *al segmentului* P Q *este o iperbolă ce trece prin punctele* A *și* B, *având centrul în mijlocul segmentului* A B *și dreptele* D_1 *și* D_2 *ca direcții asimptotice.*

In cazul particular, când B se găsește pe D_1, locul este o conică degenerată într'o paralelă dusă la D_2 prin mijlocul segmentului A B și în dreapta D_1.

Rezultă deci următoarea construcție a iperbolei, când se cunosc centrul, direcțiile asimptotice și un punct al iperbolei:

Prin punctul dat A *ducem paralelele* D_1 *și* D_2 *la direcțiile asimptotice. Fie* B *simetricul punctului dat* A *în raport cu centrul. Mijlocul segmentului* P Q *determinat de o dreaptă oarecare, ce trece prin punctul* B, *pe dreptele* D_1 *și* D_2, *descrie o iperbolă.*

Vom arăta, că teorema asupra cercului prin transformarea căruia, s'a obținut definiția de mai sus, este următoarea:

Dacă avem un cerc de centru A_1 *și o secantă variabilă ce trece prin punctul fix* B_1, *care întâlnește cercul în punctele* P_1, Q_1, *atunci locul geometric al mijloacelor coardelor* $P_1 Q_1$ *este un cerc având diametrul* $B_1 A_1$.

Fără a intra în amănuntele demonstrației, așa cum am făcut-o în c) din 3°, remarcăm că locul geometric al punctului M este o conică (C'); care este transformata cercului (C). Centrul conicei (C') se află conform proprietăților a) și b) din 2°, la mijlocul segmentului A B. Conica (C') având puncte la infinit în direcțiile dreptelor D_1 și D_2 este o iperbolă. Se vede și direct, că ea trece prin A și B, când secantei variabile ce trece prin B poziții particulare Când ea trece prin A, punctul M se confundă cu A. Secanta rotindu-se mai departe în sensul direct, într'un moment dat, ea devine paralelă cu dreapta D_1. Punctul P se găsește atunci la infinit și se obține intersectând dreapta dela infinit cu o dreaptă paralelă la D_1. Deci una dintre direcțiile asimptotice ale iperbolei (C') este direcția dreptei D_1. Paralela dusă din B la D_1 nu este asimptota iperbolei (C'), căci ea are punctul B comun cu ea. Vom arăta că paralela dusă din mijlocul segmentului A B n'are nici un punct comun la distanță finită cu iperbola. Intr'adevăr intersecția unei drepte D_1' paralelă la D_1, cu iperbola, se obține luând simetricul Q_1 al punctului A în raport cu intersecția dreptei D_1' cu D_2. Dreapta Q_1 B taie dreapta D_1 în A, iar dreapta dată în punctul cerut M_1. Dacă dreapta D_1' trece prin mijlocul segmentului A B, atunci dreapta Q_1 B este paralelă cu ea, deci D_1' nu se intersectează cu iperbola decât la infinit.

Prin rotirea secantei variabile în jurul punctului B se obțin pe rând ramurile A M_1, M_1' B, B M_2, M_2' A, dintre care două câte două sunt simetrice în raport cu centrul iperbolei și unde M_1, M_1'; M_2, M_2' sunt punctele dela infinit ale iperbolei, situate respectiv pe asimptotele ei.

Observare. Se obține aceeaș iperbolă, dacă secanta variabilă trece prin A, iar dacă din B se construiesc dreptele D_1' și D_2', paralele respectiv cu direcțiile asimptotice.

5°. **Aplicații.**

a) *Construirea centrului iperbolei, când se cunosc direcțiile asimptotice și trei puncte ale iperbolei.*

Notăm cu A, M_1 și M_2 punctele date și cu D_1 și D_2 paralele duse prin unul oarecare dintre ele, de exemplu prin punctul A, la direcțiile asimptotice.

Fie P_1' și Q_1' intersecțiile paralelelor duse prin M_1 la dreptele D_2 și D_1 cu dreptele D_1 și D_2 și fie D′ paralela dusă prin M_1 la $P_1' Q_1'$. Analog se obține și dreapta D″. Dreptele D′ și D″ se întâlnesc în centrul iperbolei.

b) Iată două proprietăți cunoscute ale iperbolei echilatere:

1) *Paralela dusă la una dintre asimptotele iperbolei formează un triunghiu isoscel cu dreptele care unesc un punct oarecare* M *al iperbolei cu două puncte diametral opuse* A *și* B, *baza triunghiului fiind situată pe paralela dusă la asimptotă.*

Într'adevăr, dacă iperbola este echilateră, atunci triunghiul A P Q este dreptunghic, P și Q fiind intersecțiile dreptei B M cu direcțiile asimptotice duse din A. Dar în acest caz triunghiul A P M este isoscel, deci dacă laturile A M și M B ale acestui triunghiu se intersectează cu o dreaptă paralelă cu baza, care este paralelă la una dintre asimptote, triunghiul obținut este și el isoscel.

2) *Construirea tangentei într'un punct* A *al iperbolei echilatere, când se cunosc punctul* A, *centrul și direcțiile asimptotice.*

Fie B punctul diametral opus punctului dat A și D_1 și D_2 paralele duse la asimptote din punctul A. Tangenta în A este simetrica dreptei A B în raport cu una dintre direcțiile asimptotice. Într'adevăr, fie M un punct oarecare al iperbolei, iar P intersecția dreptei B M cu D_1. Când P se apropie de A, și M se apropie de A, dar triunghiul A P M rămânând isoscel, unghiurile din A și P rămân tot timpul egale. La poziția limită, A M unește două puncte foarte apropiate și este simetrica dreptei A B în raport cu D_1.

Notând cu B_1 și B_2 picioarele perpendicularelor duse din B pe dreptele D_1 și D_2, vedem că tangenta în A este paralelă cu dreapta $B_1 B_2$. Dar $B_1 B_2$ este paralelă cu dreapta ce se obține unind proecțiile B_1' și B_2' ale punctului A pe asimptotele iperbolei. Fie C și D intersecțiile tangentei în A cu asimptotele. A este mijlocul segmentului C D, deoarece în triunghiul $O B_1' B_2'$, dreapta O A este mediana, O fiind centrul iperbolei, iar dreptele $B_1' B_2'$ și C D sunt paralele. Am regăsit deci o proprietate cunoscută a iperbolei pentru cazul particular al unei iperbole echilatere, pe care am tratat-o cu o altă metodă la c) din 2°.

6°. Vom arăta, că problemele 65, 68, 69, 73, 74, 85, 86 din Culegerea de Probleme de *G. Țițeica* Cap. XX, rezolvate cu metode diferite unele de altele, se obțin toate cu aceeași metodă, care se bazează pe definiția dela 4°.

a) **Problemele 65 și 86.** *Iperbola echilateră este locul punctelor* M, *astfel ca diferența unghiurilor* A *și* B *din triunghiul* M A B *să fie constantă,* A *și* B *fiind extremitățile unui diametru. Dacă diferența este egală cu un unghiu drept, segmentul* A B *este axa transversă.*

Păstrând notațiile dela 2) din 5° avem:

$$\overset{\frown}{BAM} - \overset{\frown}{ABM} = \overset{\frown}{BAP} + \overset{\frown}{PAM} - \overset{\frown}{ABM},$$

dar triunghiul A P M este isoscel Aplicând proprietatea unghiului exterior triunghiuluiAPM, avem:

$$\overset{\frown}{APM} = \overset{\frown}{ABP} + \overset{\frown}{BAP},$$

sau

$$\overset{\frown}{PAM} = \overset{\frown}{ABM} + \overset{\frown}{BAP},$$

înlocuind avem:

$$\overset{\frown}{BAM} - \overset{\frown}{ABM} = 2\overset{\frown}{BAP}$$

sau

$$\hat{A} - \hat{B} = 2k$$

deci diferența unghiurilor este egală cu îndoitul unghiului format de diametrul A B cu direcția asimptotică D_1.

Considerând alte poziții ale secantei, am observat că diferența unghiurilor $\hat{A}$ și $\hat{B}$ nu este totdeauna egală cu $2k$. Examinând poziția punctului M de pe iperbolă și valoarea corespunzătoare pentru diferența unghiurilor $\hat{A}$ și $\hat{B}$, am găsit următoarea proprietate, care nu este enunțată în Culegerea de Probleme:

Fie A *și* B *două puncte diametral opuse ale unei iperbole, iar* M *un punct oarecare al iperbolei. Diferența unghiurilor* A *și* B *din triunghiul*

AMB *este* $2k$, *sau* $180 - k$, *după cum* M *se află pe arcul* AM_1, *sau pe arcul* AM_2, *unde* M_1 *şi* M_2 *sunt punctele dela infinit ale iperbolei. Dacă* M *se găseşte pe simetricele acestor două ramuri în raport cu centrul, diferenţa dintre unghiurile* A *şi* B *este respectiv* $-2k$ *sau* $-(180^0 - 2k)$.

Caz particular. Dacă AB este diametrul iperbolei, atunci

$$k = 45^0,$$

deci

$$\hat{A} - \hat{B} = 90^0.$$

Observare. Rezultatul de mai sus ne aminteşte de o altă problemă de loc geometric. *Locul geometric al punctelor* M *pentru care suma unghiurilor* A *şi* B *din triunghiul* MAB *este constantă, este un arc de cerc, iar pentru restul arcului suma unghiurilor* A *şi* B *este egală cu* $180 - k$.

Din punct de vedere analitic e evident că uneori nu toate punctele unui loc geometric, obţinut cu ajutorul unei proprietăţi geometrice, satisfac această proprietate. In cazul nostru să notăm cu

$$f(x, y) = 0$$

ecuaţia dedusă din condiţia

$$A - B = 2k.$$

Se vede că pe curba $f(x, y) = 0$ se găsesc şi punctele pentru care

$$A_1 = A + 90^0 \quad \text{şi} \quad B_1 = B - 90^0,$$

deoarece

$$\operatorname{tg}(A_1 - B_1) = \operatorname{tg}(A - B + 180^0).$$

Punctul M_1 corespunzător unghiurilor A_1 şi B_1 se obţine, intersectând perpendicularele duse în punctele A şi B respectiv pe dreptele AM şi BM.

b) **Problema 68.** *Se dau două puncte* M_1 *şi* M_2 *ale unei iperbole şi se consideră segmentul* M_1M_2 *ca diagonala unui paralelogram, ale cărui laturi sunt paralele cu asimptotele. Să se demonstreze, că a doua diagonală trece prin centrul curbei.*

Fie D_1 şi D_2 paralelele duse la asimptote prin punctul A, iar P_1, Q_1, P_2, Q_2 intersecţiile a două secante duse prin punctul B, A şi B fiind două puncte diametral opuse ale iperbolei. Notăm cu M_1 şi M_2 mijloacele segmentelor P_1Q_1 şi P_2Q_2, iar cu M şi R mijloacele segmentelor M_1M_2 şi Q_1P_2. M fiind mijlocul segmentului care uneşte mijloacele M_1 şi M_2 ale două laturi opuse ale patrulaterului $P_1Q_1Q_2P_2$, se găseşte pe dreapta care uneşte mijloacele diagonalelor Q_1P_2 şi P_1Q_2. Dar dreapta care uneşte mijloacele diagonalelor trece prin mijlocul diagonalei a treia AB, adică prin centrul O al iperbolei. Deci punctele M, R şi O sunt colineare. Dar

$$RM_2 \parallel AQ_2 \quad \text{şi} \quad RM_1 \parallel AP_2,$$

deoarece dreptele RM_2 şi RM_1 unesc mijloacele laturilor triunghiurilor $Q_1Q_2P_2$ şi $P_1Q_1P_2$.

Dar se ştie că M_1 şi M_2 sunt două puncte ale iperbolei, care are ca direcţii asimptotice direcţiile dreptelor AQ_2 şi AP_2. Deducem că dreapta MR care uneşte mijlocul M al diagonalei M_1M_2 al paralelogramului ale cărui laturi trec prin două puncte M şi M_2 ale iperbolei şi care sunt paralele cu direcţiile asimptotice, cu vârful opus R al aceluiaş paralelogram, este diagonala a doua, care cum am văzut, trece prin punctul O, adică prin centrul iperbolei.

c) **Problema 69.** *Locul centrelor iperbolelor, ce trec prin două puncte date* A *si* M_1 *şi ale căror direcţii asimptotice sunt date, este a doua diagonală a paralelogramului, ce are ca primă diagonala pe* AM_1 *şi ale cărui laturi sunt paralele cu direcţiile asimptotice.*

Iată o soluţie independentă de rezultatele problemei 68:

Fie A şi M_1 punctele date, iar D_1 şi D_2 paralelele duse prin A la direcţiile asimptotice. Este clar că punctul B, diametral opus punctului A se află pe paralela dusă din M_1 cu dreapta $P_1'Q_1'$, P_1' şi Q_1' fiind intersecţiile paralelelor duse din M_1 la dreptele D_2 şi D_1 cu dreptele D_1 şi D_2. Centrul iperbolei se află pe mijlocul segmentului variabil AB. Punctul A fiind fix, iar B descriind o dreaptă, rezultă că locul centrului iperbolei este o dreaptă ce trece prin mijlocul segmentului AM_1 şi este paralelă la $P_1'Q_1'$, adică ea coincide cu diagonala $P_1'Q_1'$ a paralelogramului $AQ_1'M_1P_1'$.

d) **Problema 73.** *Locul centrelor iperbolelor echilatere circumscrise unui triunghiu, este cercul celor nouă puncte.*

Fie AM_1M_2 triunghiul dat şi fie B punctul diametral opus punctului A, iar D_1 şi D_2 dreptele

duse prin A şi paralele cu asimptotele iperbolei.

Ne propunem să arătăm, că locul geometric al punctului B este cercul lui *Carnot*, când dreptele D_1 şi D_2 se rotesc în jurul punctului A.

Fie P_1 şi P_2 punctele unde dreptele M_1B şi M_2B se întâlnesc cu dreapta D_1.

Laturile triunghiurilor isoscele AM_1P_1 şi AM_2P_2 formează respectiv cu bazele lor care se găsesc pe D_1, unghiuri egale. Rezultă că unghiul format de laturile M_1P_1 şi M_2P_2 este egal, sau suplimentar, cu unghiul format de AM_1 şi AM_2. Deci

$$\overset{\frown}{M_1BM_2} = \overset{\frown}{M_1AM_2},$$

adică B se găseşte pe cercul lui *Carnot*.

Centrul iperbolei se află însă la mijlocul segmentului AB. A este fix, iar B se află pe un cerc a cărui rază este egală cu raza cercului circumscris triunghiului AM_1M_2, având centrul în simetricul O_1 al centrului cercului circumscris triunghiului AM_1M_2, în raport cu M_1M_2. Deci locul geometric al mijlocului segmentului AB este un cerc cu raza egală cu jumătatea razei cercului circumscris şi cu centrul la mijlocul segmentului AO_1. Dar mijlocul segmentului AO_1 este centrul cercului celor nouă puncte.

e) **Problema 74.** *O iperbolă echilateră circumscrisă unui triunghiu* AM_1M_2 *trece prin ortocentru.*

Ne propunem să arătăm că punctul diametral opus punctului A în iperbola ce trece prin punctele A, M_1 şi M_2 coincide cu punctul diametral opus punctului A în iperbola ce trece prin punctele A, M_1 şi H, dacă aceste două iperbole au aceleaşi direcţii asimptotice. Fie B şi B′ respectiv aceste două puncte. Am văzut la d) că punctul B se află la intersecţia dreptei M_1P_1 cu cercul lui *Carnot*.

Fie P_2' intersecţia dreptei HB′ cu D_1. B′ se află la intersecţia dreptelor M_1P_1 şi HP_2'. Unghiul format de laturile HP_2' şi M_1P_1 ale triunghiurilor isoscele AHP_2' şi AM_1P_1, având bazele lor situate pe aceeaş dreaptă D_1, este egal cu unghiul format de celelalte două laturi. Deci:

$$\overset{\frown}{P_2'B'P_1} = \overset{\frown}{HAM_1}, \text{ dar } \overset{\frown}{HAM_1} = \overset{\frown}{HM_2M_1}$$

rezultă că patrulaterul $HM_2B'M_1$ este inscriptibil. Cercul ce trece prin punctele H, M_2 şi M_1 este însă cercul lui *Carnot* al triunghiului AM_1M_2, corespunzător vârfului A. Punctul B′ aflându-se la intersecţia cercului *Carnot* cu dreapta M_1P_1, coincide cu B.

f) **Problema 85.** *Un cerc ce trece prin două puncte* A *şi* B *diametral opuse pe o iperbolă echilateră, taie această curbă în două puncte, ce sunt extremităţile unui diametru al cercului, care păstrează, când cercul variază, o aceeaş direcţie perpendiculară pe tangentele în* A *şi* B *la iperbolă.*

Soluţia acestei probleme se obţine, dacă dovedim următoarele:

1) Cercul ce trece prin trei puncte A, B şi M ale unei iperbole, dintre care A şi B sunt diametral opuse în iperbola dată, mai taie iperbola într'un al patrulea punct M′ care este punctul diametral opus punctului M în cercul ce trece prin punctele A, B şi M.

Fie M′ diametral opus punctului M în cercul ce trece prin punctele A, B şi M. Vom arăta că M′ se află pe iperbolă. Într'adevăr notând cu P′ şi Q′ intersecţia dreptei BM′ cu dreptele D_1 şi D_2, deducem imediat că:

$$\sphericalangle Q'M'A = \sphericalangle AMP,$$

deoarece patrulaterul AMBM′ este prin construcţie inscriptibil. Dar,

$$\sphericalangle Q'AM' = \sphericalangle PAM$$

ca având laturile respectiv perpendiculare.

Rezultă, că triunghiurile AMP şi AM′Q′ sunt ambele isoscele, deci AM′ este mediana în triunghiul dreptunghic AP′Q′, adică:

$$Q'M' = M'P'.$$

Observare. Iperbola trece prin punctul diametral opus punctului M′. Simetricul punctului M′ în raport cu mijlocul laturii AB este ortocentrul triunghiului ABM. Deci am dovedit, că iperbola echilateră circumscrisă triunghiului ABC, trece prin ortocentru, adică am regăsit un caz particular al problemei 74.

2) Tangenta în punctul M la cercul AMB este paralelă cu tangenta în punctul A la iperbolă.

Am văzut la 2) din 5° că tangenta în punctul A la iperbolă este simetrica dreptei AB în raport cu direcţia asimptotică, ce trece prin A.

Unghiul pe care tangenta îl formează cu AM

este egal cu unghiul A B M. Dar aplicând proprietatea unghiului exterior, triunghiului A P B:

$$\sphericalangle A B M = \sphericalangle P A M - \sphericalangle B A P,$$

deoarece triunghiul A P M este isoscel.

Dar diferența din membrul al doilea reprezintă unghiul format de tangenta în A la iperbolă cu secanta A M. Membrul întâi este egal cu unghiul format de tangenta în punctul M la cerc cu secanta A M. Deci, cele două tangente sunt paralele, fiindcă formează unghiuri egale cu o secantă.

NOTE MATEMATICE

24. — *Analyse multigrade.*

I. Résoudre la quadrigrade

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_5 \overset{4}{=} b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_5.$$

Solution. Partons de l'égalité évidente

$$(m-n)+m+(m+n)=3m$$

et appliquons le théorème suivant:

„Étant donnée la multigrade

$$a_1, a_2, \dots a_p \overset{n-3}{=} b_1, b_2, \dots b_p$$

si

$$t=\frac{2(\Sigma b_i^{n-1}-\Sigma a_i^{n-1})}{(n-1)(\Sigma b_i^{n-2}-\Sigma a_i^{n-2})},$$

on aura, n étant pair,

$$a_1, a_2, \dots a_p,\ t-b_1, t-b_2, \dots t-b_p \overset{n}{=} b_1, b_2, \dots b_p, t-a_1, t-a_2, \dots t-a_p.$$

(Voir *Gloden*, Two Theorems on Multi-degree equalities, American Mathematicae Marthly, April 1946, page 205).

On trouve ainsi la quadruple identité

$$(m-n)(3m^2-n^2), m(3m^2-n^2), (m+n)(3m^2-n^2), m(n^2-m^2), 2m(4m^2-n^2), 2m(4m^2-n^2) \overset{4}{=} 3m(3m^2-n^2), 5m^3+3m^2n-mn^2-n^3, 5m^3-mn^2, 5m^3-3m^2n-mn^2+n^3, 0, 0.$$

D'après un théorème connu sur les multigrades d'ordre n on peut ajouter à tous les termes un entier arbitraire.

Exemple numérique.

$$m=3,\ n=1$$

$$26, 39, 52, (-12), 105, 105 \overset{4}{=} 117, 79, 66, 53, 0, 0$$

et en nombres positifs et minima

$$1, 39, 52, 65, 118, 118 \overset{4}{=} 13, 13, 66, 79, 92, 130.$$

II. Résoudre la quintigrade

$$A_1, A_2, A_3, A_4 A_5, A_5 A_6, A_6 \overset{5}{=} B_1, B_2, B_3, B_4 B_5, B_5, B_6, B_6.$$

Solution. Partons de la solution donnée en I pour la quadrigrade

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_5 \overset{4}{=} b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6.$$

Appliquons le théorème de *Tarry* (Voir *Gloden.* Sur les égalités multigrades, 1938, page 12) en faisant $k=2(3m^2-n^2)$. Il vient l'identité quindruple

$$(m-n)(3m^2-n^2), m(n^2-m^2), (3m+n)(3m^2-n^2), 5m^3+6m^2n-mn^2-2n^3, 2m(4m^2-n^2), 2m(4m^2-n^2), n(3m^2-n^2), n(3m^2-n^2) \overset{5}{=} 3m(3m^2-n^2), (m+2n)(3m^2-n^2), -m^3+3m^2n+mn^2-n^3, 5m^2-3m^2n-mn^2+n^3, 8m^3+3m^2n-2mn^2-n^3, 8m^3+3m^2n-3mn^2-n^3, 0, 0.$$

On peut ajouter à tous les termes un entier arbitraire r.

Exemple numérique.

$$m=2\ \ n=1$$

$$11, (-6), 77, 60, 60, 11, 11 \overset{5}{=} 66, 44, 5, 27, 71, 71, 0, 0$$

On en déduit, en nombres postifs et minima

$$1, 18, 18, 18, 67, 67, 67, 84 \overset{5}{=} 7, 7, 12, 34, 51, 73, 78, 78.$$

A. GLODEN

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul LII, No. 2, Octombrie 1946. † Profesorul-Inginer *Ion Ionescu*, de Ing *Ion S. Antoniu.* Comemorarea lui *Ion Ionescu.* † Comandorul-Inginer *I. Lintes*, de G-ral *Gr. Zapan* Multiplicitatea sistemelor izomorfe de vectori, de *V. Vâlcovici.* Concursul „Gazetei Matematice". Note, probleme rezolvate și propuse.

2. *Mihail St. Botez:* Aplicațiile Geometriei Descriptive. Este un volum de 134 pagini și cuprinde: Proecțiile cotate și axiometrice, precum și Noțiuni de teoria umbrelor și de stereometrie. Vor urma, Noțiunile de perspectivă și de stereometrie Aceste aplicații interesante și instructive complectează cursul autorului, intitulat *„Geometria Descriptivă"*, predată studenților Politehnicei din Iași. Este vorba iarăși de o lucrare interesantă și instructivă.

3. *Mihail St. Botoz:* Sur une surface cerclée particuliere. (Extras din Buletinul Politehnicei *„Gh. Asachi"*, Vol. I).

4. *Mihail St. Botez:* Remarcă asupra metodei *Kubota.* (Extras din R. M. T., Vol. XXIV, 1945).

5. *A. Gloden.* Table de factorisation des nombres x^{4+1} dans l'intervale $1000 < x < 3000$.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 2174 — *Să se rezolve şi să se discute sistemul*

$$x+y=a$$
$$x^2+y^2+2z^2=b^2$$
$$(x+y)(z^2-xy)=2cxy.$$

G-l Gh. Buicliu

Soluţie. Ecuaţia a doua se mai scrie

$$(x+y)^2+2(z^2-xy)=b^2$$

sau ţinând seamă de prima,

$$(1)\qquad z^2-xy=\frac{b^2-a^2}{2}.$$

Problema revine la a rezolva sistemul în z^2 şi xy, format din (1) şi ultima ecuaţie în care înlocuind pe $x+y$ prin a obţinem

$$(2)\qquad z^2-xy=\frac{2cxy}{a}.$$

Din (1) şi (2) se scoate

$$xy=\frac{a(b^2-a^2)}{4c}$$

$$(3)\qquad z=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+2c)(b^2-a^2)}{c}}.$$

Cunoscând suma $x+y$ produsul xy, deducem

$$x=\frac{a\sqrt{c}-\sqrt{a(ac-b^2+a^2)}}{2\sqrt{c}}$$

$$y=\frac{a\sqrt{c}+\sqrt{a(ac-b^2+a^2)}}{2\sqrt{c}}.$$

Cu acesta sistemul este rezolvat.

Condiţiile de realitate sunt

$c>0$; $(a+2c)(b^2-a^2)>0$ şi $a(ac-b^2+a^2)>0$.

Au rezolvat bine problema: *Anton Ioan, Birănaş T. Ioan* (Lic. „Avram Iancu" Brad); *Constantinescu N. Ilie* (Lic. „Bălcescu", Brăila); *Cotariu D. Marcel* (Brăila); *Creţu F. Gavril, Măran Ana, Muţiu S. Antoniu, Pat N. Moise, Săbău Gh. Mihai, Ţigănoiu Al.* (P., T.); *Filimon Ioan, Pălăceanu D. Vasile, Popescu I. Barbu* (Liceul Militar Timişoara); *Frunză Radu, Tincu C. Const.* (Liceul Diaconovici Lopa" Timişoara); *Lt. Lupescu Corneliu* (Roman); *Mahrenholz Johanes*; *Miclea N.* (Alba Iulia); *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2302. — *Se dă un triunghiu dreptunghic* ABC. *Se duce înălţimea* AD *a unghiului drept şi apoi bisectoarele* DE *şi* DF *ale unghiurilor* ADB *şi* ADC.

Notăm, $AF=\alpha$, $DE=\beta$, $DF=\gamma$. *Să se demonstreze relaţia*

$$\alpha\cdot a(b+c)=\frac{4\sqrt{2}\,s^2}{\beta+\gamma}.$$

Lt. Ion Enache

Soluţie. Construim figura în condiţiile problemei. Patrulaterul AEDF fiind inscriptibil, rezultă că

$$\sphericalangle AFE=\sphericalangle ADE=45^0 \text{ şi } \sphericalangle AEF=\sphericalangle ADF=45^0,$$

deci triunghiul dreptunghic AEF este isoscel, prin urmare.

$$(1)\qquad AE=AF=\alpha.$$

Din triunghiul dreptunghic AEF, deducem

$$\overline{EF}^2=\overline{AE}^2+\overline{AF}^2=2\alpha^2,$$

de unde,

$$(2)\qquad EF=\alpha\sqrt{2}.$$

Acum în patrulaterul inscriptibil AEDF teorema lui *Ptolomeu* ne dă

$$(3)\qquad \overline{EF}\cdot\overline{AD}=\overline{AE}\cdot\overline{DF}+\overline{AF}\cdot\overline{ED}.$$

Având în vedere notaţiile din enunţ şi relaţiile (2) şi (1), egalitatea (3) devine

$$(4)\qquad \alpha\sqrt{2}\cdot\overline{AD}=\alpha(\beta+\gamma).$$

Dar în triunghiul dreptunghic ABC, avem

$$AD=\frac{2s}{a},$$

deci (4) devine, simplificând pe α:

$$\frac{2\sqrt{2}\,s}{a}=\beta+\gamma,$$

relaţie care înmulţită cu $2s$, se mai poate scri

$$(5)\qquad 2as=\frac{4\sqrt{2}\,s^2}{\beta+\gamma}.$$

Rămâne să mai dovedim că $2s=\alpha(b+c)$.

Pentru aceasta, în triunghiul ADF, aplicăm teorema sinusurilor şi avem

$$\frac{\alpha}{\sin 45^0}=\frac{\overline{AD}}{\sin(45^0+C)},$$

sau

$$\sqrt{2}\,\alpha = \frac{\sqrt{2}\,.\,\overline{AD}}{\sin C + \cos C} = \frac{\sqrt{2}\,.\,\overline{AD}}{\frac{c}{a} + \frac{b}{a}},$$

de unde

$$\alpha = \frac{a\,.\,\overline{AD}}{b+c} = \frac{2s}{b+c}$$

şi deci $3s = \alpha(b+c)$.

In virtutea acestei relaţii (5) devine

$$\alpha\,.\,a(b+c) = \frac{4\sqrt{2}\,s^2}{\beta+\gamma}$$

şi astfel relaţia din enunţ este stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Barbu Ion*, *Bălăuţă Mihai* (Lic. Deva), *Birănaş Ioan* (P., T.), *Bogza Mihai* (Lic. Deva), *Chesaru Cristea* (P., T.), *Constantinescu Ilie* (P., T.), *Giurconiu Mihai* (P., T.), *Mazilu Marius* (Lic. Făgăraş), *Ovesea Nicolae* (P., T.), *Pali Sergiu* (P., T.), *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab Bucureşti) şi *Tincu C-tin* (P., T.).

Problema 2309. — *Să se construiască ecuaţia algebrică care are rădăcinele*

$$x = \sin^2\frac{k\pi}{n} + a\cos^2\frac{k\pi}{n} + \operatorname{tg}^2\frac{k\pi}{n},$$

unde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. *Caz particular* $a = 1$.

V. ALACI

Soluţie. Ţinând seamă de relaţiile cunoscute,

$$\sin^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}, \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},$$

relaţia din enunţ devine

$$x = \frac{\operatorname{tg}^2\frac{k\pi}{n}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{k\pi}{n}} + \frac{a}{1+\operatorname{tg}^2\frac{k\pi}{n}} + \operatorname{tg}^2\frac{k\pi}{n} = \frac{\operatorname{tg}^4\frac{k\pi}{n} + 2\operatorname{tg}^2\frac{k\pi}{n} + a}{1+\operatorname{tg}^2\frac{k\pi}{n}},$$

care adusă la forma întreagă, se poate scri

$$\operatorname{tg}^4\frac{k\pi}{n} - (x-2)\operatorname{tg}^2\frac{k\pi}{n} + a - x = 0.$$

Rezolvind această ecuaţie bipatrată în $\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n}$, obţinem

$$\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n} = \pm\frac{\sqrt{x-2\pm\sqrt{x^2-4a+4}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{\cos\frac{k\pi}{n}}.$$

Inmulţind cu i ($i=\sqrt{-1}$) şi aplicând o proprietate a proporţiilor găsim

$$\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{x-2\pm\sqrt{x^2-4a+4}}}{\sqrt{2}\mp i\sqrt{x-2\pm\sqrt{x^2-4a+4}}} = \frac{\cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}}{\cos\frac{k\pi}{n} - i\sin\frac{k\pi}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

Ridicând ambii membri la puterea n şi ţinând seamă de formula lui *Moivre*, avem

$$\left(\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{x-2\pm\sqrt{x^2-4a+4}}}{\sqrt{2}\mp i\sqrt{x-2\pm\sqrt{x^2-4a+4}}}\right)^n = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1,$$

deci

$$(1)\qquad \left(\sqrt{2}\pm i\sqrt{x-2\pm\sqrt{x^2-4a+4}}\right)^n - \left(\sqrt{2}\mp i\sqrt{x-2\pm\sqrt{x^2-4a+4}}\right)^n = 0.$$

Aceasta este ecuaţia cerută.

Caz particular, $a = 1$. In acest caz ecuaţia (1) devine

$$(\sqrt{2}\pm i\sqrt{2x-2})^n - (\sqrt{2}\mp i\sqrt{2x-2})^n = 0,$$

sau

$$(2)\qquad (1+i\sqrt{x-1})^n - (1-i\sqrt{x-1})^n = 0.$$

Observare. Se obsearvă din enunţ cu ecuaţia (2), admite rădăcinele

$$x = 1 + \operatorname{tg}^2\frac{k\pi}{n} = \sec^2\frac{k\pi}{n}, \quad (k=0,1,2,\ldots,n-1).$$

Soluţii date de dnii: *Birănaş Ion* (P., T.), *Chesaru Cristea* (P., T.), *Chiriac C.* (Brăila), *Filimon Ioan* (Liceul Militar Timişoara), *Pisanca Ionel* (Colegiul Loga), *Tincu C-tin* (P., T.) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2313. — *Să se găsească un patrat perfect de patru cifre, ştiind că a treia parte din rădăcina sa patrată se scrie la fel ca şi suma cifrelor sale efectuată în baza şase.*

GAVRIL CRETA

Soluţie. Fie $N^2 = abcd$ patratul căutat, $32 \leq N \leq 99$. Din enunţ reiese cu N este multiplu de 3, deci N^2 este multiplu de 9 şi prin urmare poate fi

9, 18, 27.

Aceste numere în baza 6 se scriu

13, 30, 43

şi înmulţite cu 3 ne dau rădăcina patrată a numărului cerut, deci N poate fi numai 39, 90 şi prin urmare

$$N^2 = 39^2 = 1521, \quad N^2 = 90^2 = 8100.$$

Dintre aceste patrate numai 1521 împlineşte toate condiţiile problemei şi ne dă singura soluţie.

Au dat soluţii bune d-nii: *Braşoveanu Gh.* (Colegiul Craiova), *Constantinescu Ilie* (P., T.), *Giurconiu Mihai* (P., T.), *Sasu Ioan* (P., T.), *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti) şi *Vrânceanu G.* (Lic. Mil. Timişoara).

Problema 2319. — *Să se rezolve un triunghiu având cunoscute un unghiul, perimetrul şi suprafaţa. Discuţie.*

I. LOZICIU

Soluţie. Fie A, $2p, s$ elemente date şi a, b, c, B, C acelea de determinat. Folosim relaţiile cunoscute

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{2p}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

De aci deducem

$$a = \frac{p \sin A}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{2p\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{p\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

Analog avem pe b şi c, prin urmare

$$(1) \quad \begin{cases} a = \dfrac{p\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} \\ b = \dfrac{p\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}} \\ c = \dfrac{p\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}. \end{cases}$$

Aceste formule dau pe a, b, c dacă, evident, putem calcula unghiurile B, C, fiindcă A şi p sunt cunoscute.

Aflarea unghiurilor B *şi* C.

Ştim că, $s = \frac{1}{2} bc \sin A = bc \sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$.

Inlocuind aci pe b şi c cu valorile lor din (1), găsim

$$s = p^2 \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2},$$

de unde

$$(2) \quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{s}{p^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}} = \frac{s\operatorname{cotg}\frac{A}{2}}{p^2}.$$

Apoi, fiindcă

$$\frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^0 - \frac{A}{2},$$

rezultă

$$\operatorname{tg}\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = \operatorname{cotg}\frac{A}{2},$$

sau

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}.$$

De aci deducem, având în vedere relaţia (2),

$$(3) \quad \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\left(1 - \frac{s\operatorname{cotg}A}{p^2}\right) - \frac{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}}{p^2}\left(p^2 - s\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\right).$$

Relaţiile (3) şi (2) ne dau suma şi produsul lui $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$; rezultă că valorile acestor tangente sunt date de ecuaţia

$$(4) \quad p^2x^2 - \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\left(p^2 - s\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\right) + s\operatorname{cotg}\frac{A}{2} = 0,$$

care rezolvată ne dă pe $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$, deci putem în urmă afla valorile unghiurilor B, C.

Odată unghiurile B, C aflate, relaţiile (1) ne dau laturile şi problema este terminată.

Discuţie. Intrucât $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ sunt pozitive, rezultă că ecuaţia (4) trebuie să aibă rădăcini reale

şi pozitive, deci să avem satisfăcute condiţiile, ţinând seamă că $s>0$, $\operatorname{tg}\frac{A}{2}>0$:

$$\operatorname{cotg}^2\frac{A}{2}\left(p^2-s\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\right)^2-4p^2s\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\geq 0$$

$$\frac{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\left(p^2-s\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\right)}{p^2}\geq 0,$$

sau

$$p^2-s\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\geq 2p\sqrt{s\operatorname{tg}\frac{A}{2}}$$

$$p^2\geq s\operatorname{cotg}\frac{A}{2}.$$

Alte soluţii date de d-nii; *Avram Cristache* (Lic. Brăila), *Birănaş Ioan* (P., T.), *Chesaru Cristea* (P., T.), *Constantinescu Ilie* (P., T.), *Fitera Ioan* (P., T.), *Popa Vasile* (P., T.), *Stroescu Florea* (Lic. Caracal) şi *Teodorescu* Petre (Lic. Matei Basarab).

Problema 2384. — *Să se arate că într'un triunghiu isoscel* A B C (C = B) *avem relaţia:*

$$\frac{b^m\sin^p B\cos^r C-c^m\sin^p C\cos^r B}{b^n\sin^q B\cos^s C-c^n\sin^q C\cos^s B}=\frac{(m+p-r)\cos^2 B+r}{(n+q-s)\cos^2 B+s}\,b^{m-n}\sin^{p-q}B\cos^{r-s}B.$$

VLADIMIR TUBAC

Soluţia 1-a. Observăm că pentru $c=b$, C = B — triunghiul fiind isoscel — primul membru ia forma $\frac{0}{0}$ şi că pentru aceleaşi valori, relaţia

$$c\sin B-b\sin C=0$$

care există într'un triunghiu, este satisfăcută.

S'a stabilit însă[1] că: *Adevărata valoare a unei expresii de forma*

$$u=\frac{f(x_1,y)}{\varphi(x_1,y)},$$

care ia forma $\frac{0}{0}$ *pentru* $x=x_1$, $y=y_1$, *soluţii ale ecuaţiei*

$$\psi(x,y)=0,$$

este câtul determinanţilor funcţionali ai funcţiilor $f(x,y)$, $\psi(x,y)$ şi $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ pentru $x=x_1, y=y_1$, adică

$$u=\left[\frac{D(f,\psi)}{D(x,y)}:\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}\right]_{\substack{x=x_1\\ y=y_1}}.$$

In cazul nostru

$$f(x,y)=b^m\sin^p B\cos^r C-c^m\sin^p C\cos^r B,$$
$$\varphi(x,y)=b^n\sin^q B\cos^s C-c^n\sin^q C\cos^s B,$$
$$\psi(x_1,y)=c\sin B-b\sin C,$$
$$x=c,\quad y=C.$$

Notând cu E primul membru, avem conform celor de mai sus.

$$E=\left[\frac{\begin{vmatrix}-mc^{m-1}\sin^p C\cos^r B & rb^m\sin^p B\cos^{r-1}C\sin C-pc^m\sin^{p-1}C\cos C\cos^r B\\ \sin B & -b\cos C\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-nc^{n-1}\sin^q C\cos^s B & -sb^n\sin^q B\cos^{s-1}C\sin C-qc^n\sin^{q-1}C\cos C\cos^s B\\ \sin B & -b\cos C\end{vmatrix}}\right]_{\substack{c=b\\ C=B}}$$

$$=\frac{b^{m-1}\sin^{p-1}B\cos^{r-1}B}{b^{n-1}\sin^{q-1}B\cos^{s-1}B}\cdot\frac{\begin{vmatrix}m\sin B\cos B & b(r\sin^2 B+p\cos^2 B\\ \sin B & -\cos B\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}n\sin B\cos B & b(s\sin^2(B+q\cos^2 B\\ \sin B & -\cos B\end{vmatrix}}$$

sau

$$E=b^{m-n}\sin^{p-q}B\cos^{r-s}B\,\frac{-mb\cos^2 B-br\sin^2 B-bp\cos^2 B}{-nb\cos^2 B-b\sin^2 B-bq\cos^2 B}$$

$$=b^{m-n}\sin^{p-q}B\cos^{r-s}B\,\frac{(m+p-r)\cos^2 B+r}{(n+q-s)\cos^2 B+s}.$$

Relaţia din enunţ este astfel stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Birănaş Ion* (P., T.), *Constantinescu Ilie* (P., T.), *Giurconiu Mihai* (P., T.), *Goldiş Gh.* (P., T.), *Petrovici Adalbert* (P., T.), *Popa Vasile* (P., T.) şi *Pop Emil* (P., T.).

[1]) *V. Alaci:* O clasă de forme nedeterminate, „R.M.T.", Vol. IV, p. 20.

Soluția 2-a. In virtutea relației $c=\frac{b\sin C}{\sin B}$, dedusă din teorema sinusurilor, primul membru al relației din enunț, notat cu E, devine

$$E=\frac{\sin^{q+m}B\cos^{r}C-\sin^{p+m}C\cos^{r}B}{\sin^{q+n}B\cos^{s}C-\sin^{q+m}C\cos^{s}B}\cdot b^{m-n}\sin^{n-m}.$$

Pentru $C=B$ — triunghiul fiind isoscel — fracția ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$, și conform regulei lui *L'Hôspital*, avem:

$$E=\left|\frac{-r\sin^{p+m}B\cos^{r-1}C\sin C-(p+m)\sin^{p+m-1}C.\cos C\cos^{r}B}{-s\sin^{q+n}B\cos^{s-1}C\sin C-(q+n)\sin^{q+n-1}C\cos C\cos^{s}C}\right|_{C=B}.b^{m-n}\sin^{n-m}B$$

$$=\frac{r\sin^{p+m+1}B\cos^{r-1}B+(p+m)\sin^{p+m-1}B\cos^{r+1}B}{s\sin^{q+n+1}B\cos^{s-1}B+(q+n)\sin^{q+n-1}B\cos^{s+1}B}\cdot b^{m-n}\sin^{n-m}B$$

$$=\frac{r\sin^{2}B+(p+m)\cos^{2}B}{s\sin^{2}B+(q+n)\cos^{2}B}\cdot\frac{\sin^{p+m-1}B\cos^{r-1}B}{\sin^{q+n-1}B\cos^{s-1}B}\cdot b^{m-n}\sin^{n-m}B=\frac{(m+p-r)\cos^{2}B+r}{(n+q-s)\cos^{2}B+s}\cdot b^{m-n}\sin^{p-q}\cos^{r-1}.$$

Acelaș rezultat ca în prima soluție.

Soluții date de d-nii: *Popa Vasile* (P., T.), *Șașu Ion* (P., T.) și *Tincu C-tin* (P., T.).

Problema 2395. — *Să se rezolve în numere întregi sistemul:*

$$\begin{cases}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{z-1}=\frac{11}{6}\\ \Sigma x^2-2\Sigma x=11\\ \Sigma x-\Sigma xy+xyz=7.\end{cases}$$

C-PT. G. P. BOERESCU

Soluție. Ecuația 2-a și a 3-a se mai pot scri

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z=11$$
$$x+y+z-xy-yz-zx+xyz=7,$$

sau încă

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=11+3=14$$
$$(x-1)(y-1)(z-1)=7-1=6.$$

Rezultă că sistemul dat, dacă notăm

(1) $$x-1=X,\quad y-1=Y,\quad z-1=Z,$$

devine

(2) $$\begin{cases}\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}+\frac{1}{Z}=\frac{11}{6}\\ X^2+Y^2+Z^2=14\\ XYZ=6.\end{cases}$$

Efectuând adunarea termenilor din prima ecuație și ținând seamă de a 3-a, avem

$$\frac{XY+YZ+ZX}{6}=\frac{11}{6},$$

sau

(3) $$XY+YZ+ZX=11.$$

Inmulțind cu 2 această relație și adunând-o la a 2-a ecuație din sistemul (2), obținem

$$(X+Y+Z)^2=36,$$

deci

(4) $$X+Y+Z=\pm 6$$

Sistemul (2), având în vedere relațiile (4) și (3) se poate scri,

$$\begin{cases}X+Y+Z=\pm 6\\ XY+YZ+ZX=11\\ XYZ=6.\end{cases}$$

Avem astfel cunoscute suma, suma produselor câte două și produsul necunoscutelor X, Y, Z. Rezultă că aceste necunoscute sunt rădăcinile ecuațiilor de gradul al 3-lea

(5) $$t^3-6t^2+11t-6=0$$

(6) $$t^3+6t^2+11t-6=0.$$

Ecuația (5) se descompune în factori astfel

$$(t-1)(t-2)(t-3)=0,$$

de unde rezultă

$$X=1,\quad Y=2,\quad Z=3.$$

Având în vedere notațiile (1), *deducem că rădăcinele sistemului dat, sunt*

$$(1)\qquad x=2,\quad y=3,\quad z=4,$$

precum și acelea ce se deduc de aci prin permutări circulare, ecuațiile sistemului dat fiind simetrice în raport cu x, y, z.

Ecuația (6), neavând soluții întregi, căci nu se anulează pentru ± 1, ± 2, ± 3, rezultă că sistemul dat nu mai are alte rădăcini întregi.

Soluții mai lungi date de d-nii: *Bălăuță Mihai* (Liceul Deva), *Birănaș Ioan* (P., T.), *Constantinescu Ilie* (P., T.), *Fitera Ioan* (P., T.), *Giurconiu Mihai* (P., T.), *Goldiș Gh.* (P., T.), *Guttman Tiberiu* (Lic. Deva), *Nedelcu Ulpius* (Șc. Ofițeri de Geniu), *Novac Ioan* (Lic. Brăila), *Popa Vasile* (P., T.), *Serengău Mihai* (P., T.), *Teodorescu Petre* (Liceul Matei Basarab, București) și *Tincu C-tin* (P. T.).

PROBLEME PROPUSE

2464. — Să se determine sistemul de numerație în care se găsesc patrate de patru cifre de forma $\overline{abbc}=(\overline{mn})^2$, știind că $a+b+c=m+n$.

V. THÉBAULT

2465. — Să se arate că dacă T_k reprezintă suma primelor k numere, iar C_m^n combinările de m obiecte luate câte n, avem următoarea relație:

$$C_n^p=\sum_{t=4}^{n-p+4}\left(C_{n-t}^{p-4}\sum_{i=1}^{t-3}T_i\right).$$

C-TIN BUDEANU

2466. — Să se rezolve ecuația

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{ix^5}{2+x^5}-\operatorname{arc\,tg}\,i\frac{x^5-x^4+1}{x^5+x^4+1}=0,$$

unde $i=\sqrt{-1}$.

MIHAI GIURCONIU

2467. — Să se construiască un triunghiu echilateral cunoscând pozițiile a două puncte de pe cercul său înscris și poziția unui punct de pe cercul său circumscris (sau invers în ceea ce privește cercurile).

VIRGIL GHITESCU

2468. Prin vârful A al triunghiului ABC se duce o dreaptă Δ. Fie C' proecția lui C pe Δ și C'' proecția lui C' pe AB. Înălțimea AH este întâlnită în D de $C'C''$. Perpendiculara din D pe Δ întâlnește în M pe BC și în E pe AB. Să se demonstreze că $CMEC'$ este un paralelogram.

Pentru ce poziție a lui Δ, punctul M este mijlocul lui BC?

G-L. GH. BUICLIU

2469. — Fie A și B extremitățile unui diametru al unui cerc O și M un punct pe cerc. Din A se duce o paralelă la raza OM a cercului O. Paralela din A la OM taie latura BM în C.

1°. Să se arate că triunghiul ABC este isoscel.

2°. Fie M mobil pe cercul O. Să se afle locul geometric al vârfului C al triunghiului ABC.

VALERIU M. STANCIU

2470. — Se cere relația între α și β ca să avem

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}=\frac{\operatorname{sp}\alpha}{\operatorname{sp}\beta}.$$

LT C-DOR C V COSTACHESCU

2471. — Să se rezolve un triunghiu ABC ($B, C<90^0$), cunoscând unghiul B și razele r_1, r_2 ale cercurilor înscrise în triunghiurile $AA'B$, $AA'C$, A' fiind piciorul înălțimei din A. Aplicație: $B=30^0$, $r_1=1$, $r_2=2$.

V. ALACI

ERATĂ In problema 2463 din N-rul trecut, ultimul rând este $\alpha, \beta<45^0$.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Balaniscu Chirică (2423, 2435, 2453); *Bala C-tin* (2362, 2403, 2406, 2410, 2413, 2419, 2424, 2429, 2430, 2447, 2454); *Beşchea Radu* (P; 2118, 2410, 2413, 2416, 2417, 2418, 2419, 2420, 2423, 2424, 2427, 2428, 2429, 2430, 2432, 2435, 2436, 2437, 2438); *Cincescu Paul* (2419, 2429, 2430, 2438, 2440, 2449, 2452, 2454, 2456); *Coman Liviu* (2452, 2456); *Constantinescu Virgil* (P; 2118, 2362, 2403, 2405, 2407, 2409, 2410, 2411, 2416, 2417, 2418, 2419, 2420, 2424, 2427, 2428, 2429, 2430, 2431, 2435, 2437, 2438, 2440, 2446, 2447, 2448, 2449, 2452, 2454, 2456); *Crăcea D-tru* (2362, 2403, 2405, 2409, 2410, 2411, 2416, 2417, 2419, 2420, 2424, 2427, 2429, 2430, 2431, 2435, 2447, 2451); *Dănescu Alexandru* (2403, 2404, 2409, 2410, 2413); *Dăscălescu Mihai* (2403, 2404, 2405, 2406, 2409, 2410, 2413); *Dobrişan Alexandru* (2406, 2407, 2408, 2411, 2416, 2418, 2419, 2420, 2423, 2424, 2427, 2435, 2437, 2438); *Enache Ion* (2427); *Fleşeriu Eugen* (2406, 2450, 2460); *Ghiţescu Virgil* (N; P.); *Haret Radu* (2405, 2419, 2424, 2429, 2430, 2452, 2454, 2460); *Hurezeanu Romulus* (P; 2452); *Mărcuţiu Silviu* (P; 2370, 2405, 2409, 2458); *Mitric Aurel* (2381, 2390, 2406, 2432, 2443); *Neguţ Ion* (P; 2435, 2437); *Pali Sergiu* (P; 1632, 2436, 2450, 2452, 2454, 2458); *Păişanu Ilie* (2405, 2435); *Pisanca Ionel* (P; 2406, 2439, 2443, 2449, 2456); *Poenaru Gh.* (2424, 2454, 2458); *Puşcaşiu Silviu* (P; 2430, 2438, 2447, 2456, 2460, 2462); *Regep Teodor* (2382, 2424); *Riştea Gh.* (2419, 2435); *Simionescu Gh.* (2435, 2454); *Şragher Adrian* (2435, 2439, 2443, 2450, 2452, 2453); *Stern Tiberiu* (2369, 2400, 2409, 2427, 2429, 2436, 2454, 2459); *Teodorescu Petre* (2131, 2135, 2219, 2293, 2316, 2370, 2374, 2379, 2388, 2390, 2408, 2412, 2422, 2442, 2444, 2457, 2458, 2459, 2460. 2462); *Turbuţiu Gh.* (2405, 2413, 2419, 2452).

INFORMAŢIUNI

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, pentru a fi luate în consideraţie, trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Rugăm pe corespondenţii noştrii ca problemele propuse să fie însoţite de soluţiile corespunzătoare.

Legându-se colecţiileR. M. T., anii II–XXV, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 1200 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II—XXV, cu preţul de lei 8000 volumul şi se trimet la cerere.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

ANUL XXVI. DECEMBRIE 1946 No. 10.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIŞOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREŢUL UNUI NUMAR 1000 LEI PREŢUL ABONAMENTULUI 8000 LEI PE AN.
PREŢUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 20 000 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **V. ALACI**: CATEVA TEOREME IN TRIGONOMETRIA PATRATICA.
2. NOTE MATEMATICE 25.
3. CHESTIUNI DE EXAMEN.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 613, 2070.
6. PROBLEME PROPUSE: 2472 - 2479.
7. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timişoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Cu plăcere anunţăm că începând de la 15 Decemvrie 1946 mai face parte dintre membrii „R.M.T." şi D-nul profesor A. MATEIU de la liceul Gh. Barițiu din Cluj.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale, vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Politehnica Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Politehnica Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Politehnica Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXVI, de 8000 (opt mii) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXV inclusiv, broşate, 8000 lei fiecare.

ANUL XXVI — No. 10. TIMISOARA, DECEMBRIE 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 1000 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 8000 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Politehnica Timișoara.

CÂTEVA TEOREME ÎN TRIGONOMETRIA PATRATICĂ

DE

V. ALACI

In cele ce urmează vom stabili unele relații simple ce există între elementele unui triunghiu A B C și razele unor anumite cercuri ce le vom defini.

Vom folosi în acest scop următoarea teoremă din „*Trigonometria patratică*“, p. 42.

Teorema A. *Într'un triunghiu dreptunghic, o catetă este egală cu suma catetelor înmulțită cu sinusul patratic al unghiului opus.*

Relațiile ce voim a le stabili le dăm în cuprinsul următoarelor teoreme.

I.

Teorema 1-a. *Dacă într'un triunghiu* A B C *ridicăm în* C *o perpendiculară pe* B C = *a, care întâlnește în* D *pe* A B *și dacă r este raza cercului înscris în triunghiul* B C D, *atunci avem relația,*

(1) $$\boxed{r = a\ sp\frac{B}{2}},$$

când $B \leqslant 90^0$ *și*

(2) $$\boxed{r = a\ cp\frac{B}{2}},$$ *când* $B > 90^0$.

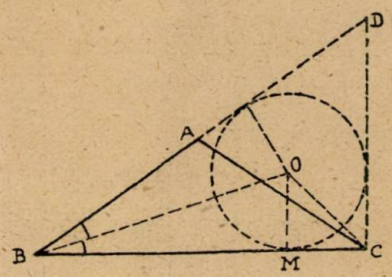


Fig. 1.

Demonstrație. 1°. Construim figura în condițiile enunțului ($B \leqslant 90^0$) și fie O centrul cercului înscris în triunghiul B C D, iar $\overline{OM} = r$.

In triunghiul dreptunghic B M O, *teorema* A, enunțată mai sus, ne dă

$$\overline{OM} = (\overline{BM} + \overline{OM})\ sp\frac{B}{2} = (\overline{BM} + \overline{MC})\ sp\frac{B}{2},$$

sau $$r = a\ sp\frac{B}{2},$$

adică relația (1).

2°. Construim figura în condițiile enunțului ($B > 90^0$) și fie O centrul cercului înscris în triunghiul B C D, iar $\overline{OM} = r$.

In triunghiul dreptunghic B M O, *teorema* A, ne dă

$$\overline{OM} = (\overline{BM} + \overline{OM})\ sp\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right) =$$

$$(\overline{BM} + \overline{MC})\ cp\frac{B}{2}, \quad \text{sau} \quad r = a\ cp\frac{B}{2}$$

adică relația (2).

Teorema 2-a. *Dacă într'un triunghiu isoscel* A B C ($B = C$) *ducem dintr'un punct* M *al laturei* B C *perpendicularele* M D, M E *respectiv pe laturile* A B *și* A C, *atunci între razele* r_1 *și* r_2 *ale cercurilor înscrise în triunghiurile* B M D, C M E

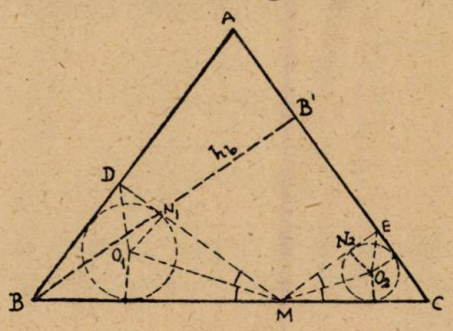


Fig. 2.

și înălțimea h_b *a triunghiului* A B C, *există relația,*

$$\boxed{r_1 + r_2 = h_b\ sp\left(45^0 - \frac{B}{2}\right)}.$$

Demonstrație. Construim figura în condițiile enunțului și fie O_1, O_2 centrele cercurilor înscrise în triunghiurile MDB, MEC și $\overline{O_1N_1} = r_1$, $\overline{O_2N_2} = r_2$.

Observăm că,

$$\sphericalangle O_1MN_1 = 45^0 - \frac{B}{2}, \quad \sphericalangle O_2MN_2 = 45^0 - \frac{C}{2}$$

și *teorema* A enunțată la început, ne dă

$$\overline{O_1N_1} = (\overline{O_1N_1} + \overline{N_1M})\ sp\left(45^0 - \frac{B}{2}\right) =$$

$$(\overline{DN_1} + \overline{N_1M})\ sp\left(45^0 - \frac{B}{2}\right),$$

$$\overline{O_2N_2} = (\overline{O_2N_2} + \overline{N_2M})\ sp\left(45^0 - \frac{C}{2}\right) =$$

$$(\overline{EN_2} + \overline{N_2M})\ sp\left(45^0 - \frac{B}{2}\right),$$

sau

$$r_1 = \overline{MD}\ sp\left(45^0 - \frac{B}{2}\right), \quad r_2 = \overline{ME}\ sp\left(45^0 - \frac{B}{2}\right).$$

Ținând acum seamă de proprietatea cunoscută că, *suma perpendicularelor duse dintr'un punct* M *al bazei unui triunghiu isoscel pe laturile* AB, AC *este egală cu înălțimea din* B, *sau* C, rezultă adunând relațiile de mai sus,

$$r_1 + r_2 = h_b\ sp\left(45^0 - \frac{B}{2}\right),$$

tocmai relația cerută.

Teorema 3-a. *Dacă din punctul* M, *piciorul medianei din* A *a unui triunghiu* ABC *ducem perpendicularele* MD, ME *pe laturile* AB, AC *și însemnăm cu* O_1, O_2 *centrele cercurilor înscrise în triunghiurile* MDB *și* MEC, *atunci între suprafețele* s_1, s_2 *ale triunghiurilor* O_1AB, O_2AC, *există relația,*

$$(1) \qquad \boxed{\frac{s_1}{s_2} = \frac{sp\left(45^0 - \frac{B}{2}\right)}{sp\left(45^0 - \frac{C}{2}\right)}},$$

dacă unghiurile B *și* C *sunt ascuțite, iar dacă unul din unghiurile* B, C *este obtuz,* B *de exemplu, avem relația,*

$$(1') \qquad \boxed{\frac{s_1}{s_2} = \frac{sp\left(\frac{B}{2} - 45^0\right)}{sp\left(45^0 - \frac{C}{2}\right)}}.$$

Demonstrație. 1°. Construim figura în condițiile enunțului și fie O_1, O_2 centrele cercurilor înscrise în triunghiurile MDB și MEC. Ducem din O_1, O_2 perpendicularele $O_1N_1 = r_1$, $O_2N_2 = r_2$ respectiv pe MD, ME și observăm apriori că,

$$\sphericalangle O_1MN_1 = 45^0 - \frac{B}{2}, \quad \sphericalangle O_2MN_2 = 45^0 - \frac{C}{2}.$$

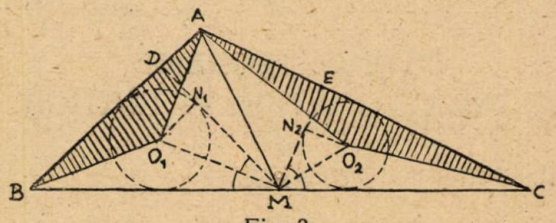


Fig. 3.

Acum, în triunghiul dreptunghic $O_1N_1M_1$ *teorema* A, ne dă

$$\overline{O_1N_1} = (\overline{O_1N_1} + \overline{N_1M})\ sp\left(45^0 - \frac{B}{2}\right) =$$

$$(\overline{DN_1} + \overline{N_1M})\ sp\left(45^0 - \frac{B}{2}\right),$$

sau

$$r_1 = \overline{MD}\ sp\left(45^0 - \frac{B}{2}\right).$$

Analog, in triunghiul dreptunghic O_2N_2M, avem

$$r_2 = \overline{ME}\ sp\left(45^0 - \frac{C}{2}\right).$$

Prin urmare

$$(2) \qquad \frac{r_1}{r_2} = \frac{\overline{MD}}{\overline{ME}} \cdot \frac{sp\left(45^0 - \frac{B}{2}\right)}{sp\left(45^0 - \frac{C}{2}\right)}.$$

Cum M este piciorul medianei din A, rezultă conform unei proprietăți cunoscute (Exercices de Géométrie, par F. G. M., p. 74) că, raportul perpendicularelor MD, ME este egal cu raportul invers al laturilor opuse, adică

$$\frac{\overline{MD}}{\overline{ME}} = \frac{b}{c},$$

astfel că relația (2) devine

$$(3) \qquad \frac{cr_1}{br_2} = \frac{sp\left(45^0 - \frac{B}{2}\right)}{sp\left(45^0 - \frac{C}{2}\right)}.$$

Dar,

$$cr_1 = 2s_1, \quad br_2 = 2s_2,$$

s_1, s_2 fiind suprafețele triunghiurilor O_1AB, O_2AC astfel că (3) devine

$$\frac{s_1}{s_2}=\frac{sp\left(45^0-\frac{B}{2}\right)}{sp\left(45^0-\frac{C}{2}\right)},$$

tocmai relația (1).

2°. Dacă unghiul B este obtuz, efectuând aceiași construcție ca mai sus, vom observa că

$$\sphericalangle O_1N_1M=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-(\pi-B)\right]=\frac{B}{2}-45^0,$$

restul demonstrației rămânând aceleași.

Astfel, în acest caz, termenul $sp\left(45^0-\frac{B}{2}\right)$ din (1), se va înlocui prin $sp\left(\frac{B}{2}-45^0\right)$ și obținem relația (1′).

Observare. Dacă $A=90^0$, atunci $\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=45^0$ și relația (1) devine

$$(1'')\qquad \boxed{\frac{s_1}{s_2}=\frac{sp\frac{C}{2}}{sp\frac{B}{2}}}.$$

Teorema 4-a. *Într'un triunghiu dreptunghic* ABC *ducem bisectoarea* BD *a unghiului* B *și însemnăm cu* O′, O *centrele cercurilor înscrise în triunghiurile* ABD *și* ABC. *Dacă* r_1, r *sunt respectiv razele acestor cercuri și dacă* s_1, s *sunt suprafețele triunghiurilor* AOC, ABC, atunci avem relațiile

$$(1)\qquad \boxed{\frac{r_1}{r_2}=\frac{sp\frac{B}{4}}{sp\frac{B}{2}}},\qquad (2)\qquad \boxed{s_1=s\,.\,sp\frac{B}{2}}.$$

Demonstrație. Construim figura în condițiile enunțului și fie $O_1M_1=r_1$, $OM=r$ razele cercurilor O_1, O.

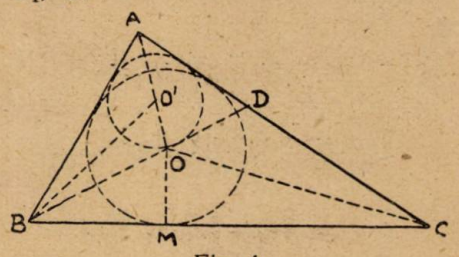


Fig. 4.

În triunghiul dreptunghic M_1O_1B, *teorema* A, ne dă

$$\overline{O_1M_1}=(\overline{O_1M_1}+\overline{M_1B})\,sp\frac{B}{4}=(\overline{AM_1}+\overline{M_1B})\,sp\frac{B}{4}\cdot$$

sau

$$r_1=c\,.\,cp\frac{B}{4}\cdot$$

Analog, în triunghiul dreptunghic MOB, avem

$$(3)\qquad r=c\,.sp\frac{B}{2},$$

prin urmare

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{sp\frac{B}{4}}{sp\frac{B}{2}},$$

tocmai relația (1).

Pentru a stabili relația (2), înmulțim (3) cu b și observând că

$$r\,b=2\,s_1,\quad b\,c=2\,s,$$

obținem

$$s_1=s\,.\,sp\frac{B}{2},$$

tocmai relația (2).

Teorema 5-a. *Într'un triunghiu oarecare* ABC *ducem din* A *înălțimea* AD *și bisectoarea* AE. *Dacă* r_1, r_2 *sunt razele cercurilor* O_1, O_2 *înscrise în triunghiurile* ADE *și* ADB, *atunci avem relația*

$$(1)\qquad \boxed{\frac{r_1}{r_2}=\frac{sp\frac{B-C}{4}}{sp\left(45^0-\frac{B}{2}\right)}},\qquad (B>C),$$

când $B<90^0$. *Dacă însă* $B>90^0$, *avem relația*

$$(2)\qquad \boxed{\frac{r_1}{r_2}=\frac{sp\frac{B-C}{4}}{sp\left(\frac{B}{2}-45^0\right)}}.$$

Demonstrație. 1°. Construim figura în condițiile enunțului și ducem razele $\overline{O_1M_1}=r$, $\overline{O_2M_2}=r_2$, observând că

$$\sphericalangle DAE=\frac{B-C}{2},\qquad \sphericalangle DAB=90^0-B.$$

In triunghiul dreptunghic O_1M_1A, *teorema* A, ne dă

$$\overline{O_1M_1} = (\overline{O_1M_1} + \overline{M_1A})\, sp\frac{B-C}{4} =$$

$$(\overline{DM_1} + \overline{M_1A})\, sp\frac{B-C}{4},$$

sau

$$r_1 = \overline{AD}\, sp\frac{B-C}{4}.$$

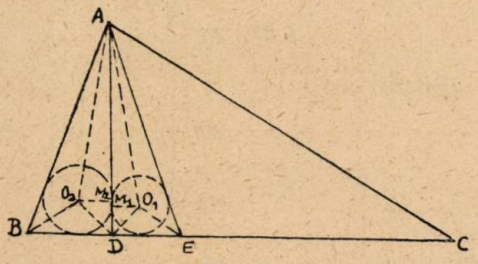


Fig. 5.

Analog, în triunghiul dreptunghic O_2M_2A, avem

$$r_2 = \overline{AD}\, sp\left(45^0 - \frac{B}{2}\right),$$

prin urmare

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{sp\dfrac{B-C}{4}}{sp\left(45^0 - \dfrac{B}{2}\right)},$$

tocmai relația (1).

2°. Dacă $B > 90^0$, efectuând aceiași construcție ca mai sus, se va observa că,

$$\sphericalangle O_2AM_2 = \frac{1}{2}\left[(90^0 - (180^0 - B)\right] = \frac{B}{2} - 45^0,$$

astfel că termenul $sp\left(45^0 - \dfrac{B}{2}\right)$ din (1) se va înlocui prin $sp\left(\dfrac{B}{2} - 45^0\right)$ și vom obține astfel relația (2).

Teorema 6-a. *Dintr'un punct* O, *din planul unui triunghiu* ABC, *ducem o perpendiculară* OD *pe latura* BC *și fie*

$$\sphericalangle OBD = \alpha, \quad \sphericalangle OCD = \beta.$$

Dacă r_1, r_2 *sunt razele cercurilor* O_1, O_2 *înscrise respectiv în triunghiurile* ODB *și* ODC, *atunci avem relațiile*

(1) $$\boxed{a = \frac{r_1}{sp\dfrac{\alpha}{2}} + \frac{r_2}{sp\dfrac{\beta}{2}}},$$

(2) $$\boxed{\frac{r_1}{sp\left(45^0 - \dfrac{\alpha}{2}\right)} = \frac{r_2}{sp\left(45^0 - \dfrac{\beta}{2}\right)}}.$$

Dacă însă D *este pe prelungirea laturei* BC *spre stânga, sau spre dreapta, atunci primul, sau al 2-lea termen din* (1) *are semnul schimbat.*

Demonstrație. 1°. Construim figura în condițiile enunțului și ducem din O_1, O_2 perpendicularele $O_1M_1 = r_1$, $O_2M_2 = r_2$.

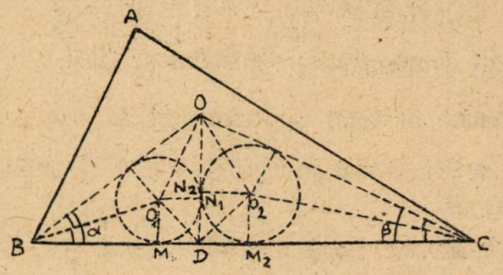


Fig. 6.

In triunghiul dreptunghic O_1M_1B, *teorema* A, ne dă

$$\overline{O_1M_1} = (\overline{O_1M_1} + \overline{M_1B})\, sp\frac{\alpha}{2} = (\overline{M_1D} + \overline{M_1B})\, sp\frac{\alpha}{2},$$

sau

$$r_1 = \overline{BD}\, sp\frac{\alpha}{2}, \quad \text{deci (3)} \quad \overline{BD} = \frac{r_1}{sp\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Analog, în triunghiul dreptunghic O_2M_2C, avem

(4) $$DC = = \frac{r_2}{sp\dfrac{\beta}{2}}.$$

Adunând relațiile (3) și (4), obținem

$$a = \frac{r_1}{sp\dfrac{\alpha}{2}} + \frac{r_2}{sp\dfrac{\beta}{2}},$$

tocmai relația (1).

2°. Ducem acum perpendicularele O_1N_1, O_2N_2 pe OD. In triunghiul dreptunghic O_1N_1O, în care observăm că $\sphericalangle O_1ON_1 = 45^0 - \dfrac{\alpha}{2}$, *teorema* A, ne dă

$$\overline{O_1N_1} = (\overline{O_1N_1} + \overline{N_1O})\, sp\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$(\overline{DN_1} + \overline{N_1O})\, sp\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right),$$

sau

$$r_1 = \overline{DO}\, sp\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Analog, în triunghiul dreptunghic O_2ON_2, avem

$$r_2 = \overline{DO}\ sp\left(45^0 - \frac{\beta}{2}\right),$$

prin urmare

$$\frac{r_1}{sp\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{r_2}{sp\left(45^0 - \frac{\beta}{2}\right)},$$

tocmai relația (2).

3°. Dacă punctul D, piciorul perpendicularei din O pe BC este pe prelungirea lui BC, la stânga sau la dreapta, relațiile (3) și (4) rămân aceleași, dar în primul caz trebuie să scădem relația (4) din (3), în al 2-lea caz trebuie să scădem relația (3) din (4) și obținem tot relația (1), în care primul sau al 2-lea termen din membrul al 2-lea își schimbă semnul. Relația (2) rămâne în ambele aceste cazuri neschimbată.

Cazuri particulare remarcabile.

Cazul 1. Dacă O este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, atunci observăm că

$$\alpha = \frac{B}{2}, \qquad \beta = \frac{C}{2},$$

și privind relațiile (1) și (2), putem enunța teorema:

Teorema 7-a. *Dacă din centrul* O *al cercului înscris într'un triunghiu* ABC *ducem pe* $BC = a$ *perpendiculara* OD, *atunci razele* r_1, r_2 *ale cercurilor înscrise în triunghiurile* ODB *și* ODC *satisfac relațiile*

(1) $$\boxed{a = \frac{r_1}{sp\frac{B}{4}} + \frac{r_2}{sp\frac{C}{4}}}$$

(2) $$\boxed{\frac{r_1}{sp\left(45^0 - \frac{B}{4}\right)} = \frac{r_2}{sp\left(45^0 - \frac{C}{4}\right)}}$$

Observare. Dacă O ar fi însă centrul cercului exînscris unui triunghiu ABC, corespunzător unei laturi, am obține relații analoage cu (1) și (2) pe care nu le mai relevăm.

Cazul 2. Dacă O este ortocentrul unui triunghiu ABC, $(B, C < 90^0)$ atunci observăm că,

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - C, \qquad \beta = \frac{\pi}{2} - B$$

și privind relațiile (1) și (2) putem enunța teorema:

Teorema 8-a. *Dacă din ortocentrul* H *al unui triunghiu* ABC $(B, C < 90^0)$ *ducem pe* $BC = a$ *perpendiculara* HD, *atunci razele* r_1, r_2 *ale cercurilor înscrise în triunghiurile* HDB *și* HDC, *satisfac relațiile*

(1) $$\boxed{a = \frac{r_1}{sp\left(45^0 - \frac{C}{2}\right)} + \frac{r_2}{sp\left(45^0 - \frac{B}{2}\right)}},$$

(2) $$\boxed{\frac{r_1}{sp\frac{C}{2}} = \frac{r_2}{sp\frac{B}{2}}}.$$

Observare. Dacă unul din unghiurile B sau C ar fi obtuz, am avea formule analoage cu (1) și (2), pe care nu le mai relevăm.

Cazul 3. Dacă O coïncide cu vârful A al triunghiului ABC $(B, C < 90^0)$, atunci observăm că

$$\alpha = B, \quad \beta = C$$

și putem enunța următoarea teoremă:

Teorema 9-a. *Dacă într'un triunghiu* ABC $(B, C < 90^0)$ *ducem înălțimea* AD, *atunci razele* r_1, r_2 *ale cercurilor înscrise în triunghiurile* ADB *și* ADC, *satisfac relațiile*

(1) $$\boxed{a = \frac{r_1}{sp\frac{B}{2}} + \frac{r_2}{sp\frac{C}{2}}},$$

(2) $$\boxed{\frac{r_1}{sp\left(45^0 - \frac{B}{2}\right)} = \frac{r_2}{sp\left(45^0 - \frac{C}{2}\right)}}.$$

Dacă însă $B > 90^0$, *atunci avem relațiile*

(1′) $$\boxed{a = \frac{r_2'}{sp\frac{C}{2}} - \frac{r_1}{cp\frac{B}{2}}},$$

(2′) $$\boxed{\frac{r_1}{sp\left(\frac{B}{2} - 45^0\right)} = \frac{r_2}{sp\left(45^0 - \frac{C}{2}\right)}}.$$

Observare. Dacă O ar coïncide cu piciorul bisectoarei, sau al înălțimei din B, sau C, am obține relații analoage cu (1) și (2) pe care nu le mai relevăm.

Teorema 10. *Într'un triunghiu* ABC *ducem pe latura* BC *într'un punct* D *al ei o perpendiculară, care întâlnește în* E *și* F *pe* AB *și* AC.

Dacă r_1 şi r_2 sunt razele cercurilor O_1, O_2 înscrise în triunghiurile B D E *şi* C D F, *atunci avem relaţia*

$$a = \frac{r_1}{sp\frac{B}{2}} + \frac{r_2}{sp\frac{C}{2}}, \tag{1}$$

când B *şi* C *sunt ascuţite.*

Dacă însă $B > 90^0$, *sau* $C > 90^0$, *atunci avem respectiv relaţiile*

$$a = \frac{r_1}{cp\frac{B}{2}} + \frac{r_2}{sp\frac{C}{2}}, \tag{1'}$$

sau

$$a = \frac{r_1}{sp\frac{B}{2}} + \frac{r_2}{cp\frac{C}{2}}. \tag{1''}$$

Demonstraţie. 1°. Din O_1, O_2 ducem pe B C perpendicularele $O_1 M_1 = r_1$, $O_2 M_2 = r_2$.

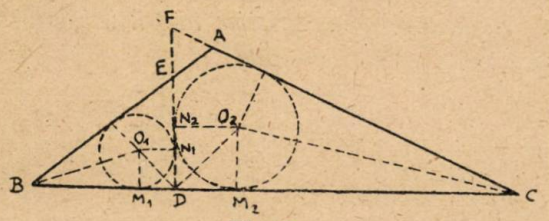


Fig. 7.

In triunghiul dreptunghic $B M_1 O_1$, *teorema A*, ne dă

$$r_1 = (\overline{BM_1} + \overline{M_1O_1})\, sp\frac{B}{2} = (\overline{BM_1} + \overline{M_1D})\, sp\frac{B}{2},$$

deci

$$\overline{BD} = \frac{r_1}{sp\frac{B}{2}}. \tag{2}$$

Analog, în triunghiul dreptunghic $C M_2 O_2$, avem

$$\overline{DC} = \frac{r_2}{sp\frac{C}{2}} \tag{3}$$

Adunând relaţiile (2) şi (3), obţinem

$$a = \frac{r_1}{sp\frac{B}{2}} + \frac{r_2}{sp\frac{C}{2}},$$

tocmai relaţia (1).

2°. Dacă $B > 90^0$, sau $C > 90^0$, efectuând construcţia din enunţ, se observă că în primul caz,

$$\sphericalangle O_1 B M_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2},$$

iar în al 2-lea caz,

$$\sphericalangle O_2 C M_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2},$$

astfel că termenul $sp\frac{B}{2}$, sau $sp\frac{C}{2}$ din (1), trebuesc înlocuiţi respectiv prin

$$sp\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right) = cp\frac{B}{2}, \text{ sau } sp\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = cp\frac{C}{2}$$

şi obţinem respectiv în locul relaţiei (1), relaţiile (1'), sau (1'').

II.

Teoremele simple de *Trigonometrie patratică* ce le-am stabilit, pot sugera un anumit gen de probleme interesante şi le pot soluţiona cu uşurinţă. Aceste probleme pot fi rezolvate şi cu ajutorul *Trigonometriei circulare,* dar calculele sunt mai dezvoltate.

Vom soluţiona acum numai două probleme de acest fel:

Problema 1-a. *Să se rezolve un triunghiu isoscel* A B C ($B = C$) *cunoscând unghiul* B *şi suma razelor cercurilor înscrise în triunghiurile dreptunghice* M D B *şi* M E C, M *fiind un punct situat pe* B C, *iar* M D, M E *perpendiculare respectiv pe* A B, A C.

Soluţie. Cunoaştem astfel, unghiul $B = C$ şi suma $r_1 + r_2 = d$ a razelor cercurilor înscrise în triunghiurile M D B, M E C, fig. 2. Avem de aflat, unghiul A şi laturile a, $b = c$.

Observăm întâi că

$$A = 180^0 - 2B. \tag{1}$$

Apoi teorema 2-a ne dă

$$r_1 + r_2 = h_b\, sp\left(45^0 - \frac{B}{2}\right) = d,$$

unde h_b este înălţimea BB_1.

Deducem

$$h_b = \frac{d}{sp\left(45^0 - \frac{B}{2}\right)},$$

iar din triunghiul dreptunghic $B B_1 C$ obţinem

$$a = \frac{h_b}{\sin B} = \frac{d}{\sin B\, sp\left(45^0 - \frac{B}{2}\right)}. \tag{2}$$

Având acum cunoscute a şi $B = C$, celelalte două laturi se obţin din teorema sinusurilor, anume

$$(3) \qquad b = c = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{d}{\sin 2B \; sp\left(45^0 - \frac{B}{2}\right)}.$$

Relaţiile (1), (2), (3) rezolvă complect problema.

Problema 2-a. *Să se rezolve un triunghiu oarecare* A B C, *cunoscând unghiul* B *şi razele* r_1, r_2 *ale cercurilor înscrise în triunghiurile* O D B *şi* O D C, O *fiind centrul cercului înscris în triunghiul* A B C, *iar* O D *fiind perpendiculara din* O *pe* B C.

Soluţie. Cunoaştem unghiul B şi razele r_1, r_2 ale cercurilor înscrise în triunghiurile O D B şi O D C. Avem de aflat unghiurile C, A şi laturile a, b, c ale triunghiului A B C.

Relaţia (2) din *teorema 7-a*, anume

$$\frac{r_1}{sp\left(45^0 - \frac{B}{4}\right)} = \frac{r_2}{sp\left(45^0 - \frac{C}{4}\right)},$$

ne dă

$$(1) \qquad sp\left(45^0 - \frac{C}{4}\right) = \frac{r_2 \; sp\left(45^0 - \frac{B}{4}\right)}{r_1}.$$

Din această relaţie aflăm unghiul C şi pentru ca problema să fie posibilă trebuie să avem,

$$sp\,\frac{B}{4} < \frac{r_2 \; sp\left(45^0 - \frac{B}{4}\right)}{r_1} < \frac{1}{2},$$

fiindcă

$$\frac{B}{4} + \frac{C}{4} < 45^0 \text{ şi } sp\ 45^0 = \frac{1}{2}.$$

Având acum unghiurile B şi C cunoscute, unghiul A este dat de relaţia

$$(2) \qquad A = 180^0 - (B + C).$$

Latura a este apoi dată de relaţia (1) din *teorema 7-a*, anume

$$(3) \qquad a = \frac{r_1}{sp\frac{B}{4}} + \frac{r_2}{sp\frac{C}{4}},$$

în care toate elementele din membrul al 2-lea sunt cunoscute.

Având astfel cunoscute până aci unghiurile B, C şi latura a, teorema sinusurilor ne dă şi celelalte laturi, anume

$$(4) \qquad b = \frac{a \sin A}{\sin B}, \qquad c = \frac{a \sin A}{\sin C}.$$

Relaţiile (1), (2), (3), (4) rezolvă complect problema.

Observare. Aceste probleme şi altele analoage le vom da ca probleme propuse, cerând de la corespondenţii noştri soluţii directe, care confruntate cu soluţiile de mai sus, vor pune in evidenţă că acest gen de probleme se rezolvă mult mai simplu prin *Trigonometria patratică*.

NOTE MATEMATICE

25. — *Asupra problemei 2174.* În soluţia dată problemei *2174*, soluţie publicată în Nr 9 a. c. la pag. 111, discuţia cerută în enunţul problemei n'a fost făcută. Ca urmare ne permitem să dăm pe această cale cuvenita complectare.

Observăm dela început, că în ipoteza $c \neq 0$, sistemul de soluţii poate să fie scris sub forma

$$x = \frac{1}{2c}\left[ac - \sqrt{a^2c^2 - ac(b^2 - a^2)}\right];$$

$$(1) \qquad y = \frac{1}{2c}\left[ac + \sqrt{a^2c^2 - ac(b^2 - a^2)}\right];$$

$$z = \pm\frac{1}{2c}\sqrt{c(a + 2c)(b^2 - a^2)};$$

Asemenea soluţia simetrică în raport cu x şi y.

Dacă presupunem în sistemul dat $c = 0$, însă $a \neq 0$, sistemul devine

$$(2) \qquad x + y = a; \quad z^2 - xy = 0; \quad (x + y)^2 = b^2$$

compatibil şi *nedeterminat* pentru $a^2 = b^2$ şi *imposibil* pentru $a^2 \neq b^2$.

Dacă presupunem $c = 0$, $a = 0$, b *oarecare*, sistemul devine

$$(3) \qquad x + y = 0; \quad 2(z^2 - xy) = b^2$$

totdeauna posibil, însă nedeterminat.

În cazul când $c \neq 0$, dar $a = 0$, sistemul devine

$$(4) \qquad x + y = 0; \quad xy = 0; \quad 2z^2 = b^2$$

admiţând soluţiile reale

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \pm\frac{b\sqrt{2}}{2}.$$

In cazul când $c \neq 0$, $a \neq 0$, $b = 0$, sistemul dat are numai soluţii imaginare, deoarece ecuaţia $x^2 + y^2 + 2z^2 = 0$ nu poate fi satisfăcută de numere reale.

Rămâne să discutăm realitatea rădăcinilor sistemului dat în cazul general în care numerele reale *a, b, c sunt toate diferite de zero.* Condiţiile la care trebue să satisfacă *a, b, c,* pentru ca valorile rădăcinilor *x, y, z* să fie reale, sunt următoarele

$$(5)\qquad \begin{cases} ac(ac-b^2+a^2)\geqq 0 \\ c(a+2c)(b^2-a^2)\geqq 0, \end{cases}$$

sau, observând că $c\neq 0$ şi c^4 este totdeauna pozitiv, sub forma

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{a}{c}\left[\dfrac{a}{c}-\left(\dfrac{b}{c}\right)^2+\left(\dfrac{a}{c}\right)^2\right]\geqq 0 \\ \left[\dfrac{a}{c}+2\right]\left[\left(\dfrac{b}{c}\right)^2-\left(\dfrac{a}{c}\right)^2\right]\geqq 0, \end{cases}$$

sau încă, punând

$$(7)\qquad \frac{a}{c}=m \quad \text{şi} \quad \left|\frac{b}{c}\right|=n,$$

sub forma mai simplă

$$8)\qquad \begin{cases} m(m^2+m-n^2)\geqq 0 \\ (m+2)(m-n)(m+n)\leqq 0. \end{cases}$$

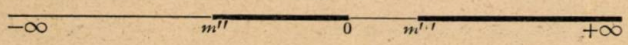
Să considerăm prima inecuaţie

$$(9)\qquad m(m^2+m-n^2)\geqq 0.$$

Rădăcinile polinomului fiind

$$m'=0,\ m''=\frac{-1-\sqrt{1+4n^2}}{2},\ m'''=\frac{-1+\sqrt{1+4n^2}}{2}$$

şi reprezintând pe o dreaptă valorile lui m



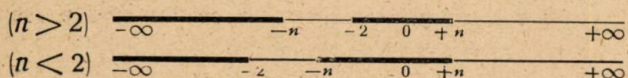
găsim că inecuaţia (9) este satisfăcută pentru valorile lui m cuprinse în intervalele

$$(m'',\ 0);\quad (m''',\ +\infty).$$

Considerând a doua inecuaţie

$$(10)\qquad (m+2)(m+n)(m-n)\leqq 0$$

şi reprezentând pe o dreaptă valorile lui m, avem



deci inecuaţia (10) este satisfăcută pentru valorile lui m aflate în intervalele arătate în fig. de mai sus.

Pentru obţinerea soluţiilor sistemului (8), observăm în primul rând că n fiind pozitiv şi având $2n<\sqrt{1+4n^2}<2n+1$, deducem

$$\frac{1+\sqrt{1+4n^2}}{2}>\frac{2n+1}{2}>n,$$

deci

$$m''=\frac{-1-\sqrt{1+4n^2}}{2}<-n \quad \text{şi}$$

$$\frac{-1+\sqrt{1+4n^2}}{2}<\frac{2n+1-1}{2}=n, \text{ deci } m'''<n.$$

Asemenea observând că

$$d=\frac{1+\sqrt{1+4n^2}}{2}-2=\frac{1}{2}(\sqrt{1+4n^2}-3)=$$

$$=\frac{(1+4n^2)-9}{2(\sqrt{1+4n^2}+3)}=\frac{2(n+\sqrt{2})(n-\sqrt{2})}{\sqrt{1+4n^2}+3},$$

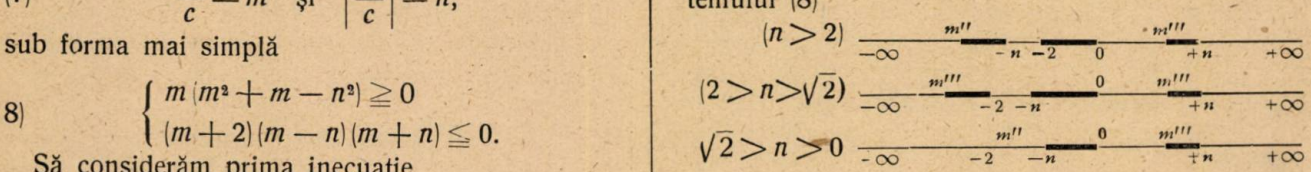
rezultă că

dacă $n>\sqrt{2}$ avem $m''<-2$

„ $n<\sqrt{2}$ „ $m''>-2$

„ $n=\sqrt{2}$ „ $m''=-2.$

Aşadar, următoarele aşezări pentru soluţiile sistemului (8)



şi ca urmare următorul rezultat final al discuţiilor.

Dacă $n>2$, rădăcinile sistemului dat sunt reale, când m este cuprins în intervalele $(m'', -n)$; $(-2, 0)$; m''', $n)$.

Dacă $2>n>\sqrt{2}$, rădăcinile sistemului dat sunt reale, când m este cuprins în intervalele $(m'', -2)$; $-n, 0)$; (m'', n).

Dacă $\sqrt{2}>n>0$, rădăcinile sistemului sunt reale, când m este cuprins în intervalele $(-n, 0)$; (m''', n).

Dacă $n=\sqrt{2}$, rădăcinile sistemului dat sunt reale, când m este cuprins în intervalele $(-\sqrt{2}, 0)$; $(+1, +\sqrt{2})$.

O. N. Ţ.

EXAMEN DE ADMITERE LA POLITEHNICA TIMIŞOARA

Facultatea Electromecanică.
(5—9 Noembrie 1946).

ALGEBRA.

I.

1°. Să se arate că funcţiile

$$(1)\qquad y=\arccos a\sqrt{x}, \qquad z=2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}-2a\sqrt{x}}{1+2\sqrt{1-a^2x}}$$

au aceiaşi derivată.

2°. Să se determine valorile reale ale lui a astfel ca ecuaţia

$$1 + y' = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x(1 - a^2 x)}}$$

să admită o rădăcină dublă, y' fiind derivata lui y din (1).

II.

1°. Să se determine a şi b astfel ca polinomul

$$P(x) = x^5 - 6x^4 + 34x^3 + (a^2 + b^2 - 36)x^2 + (a + b + ab + 5)x + 34$$

să se admită rădăcina $3 + 5i$, $(i = \sqrt{-1})$.

1°. Inlocuind valorile găsite pentru a şi b în polinomul (1), să se rezolve apoi ecuaţia

$$P(x) = 0.$$

III.

Se dă ecuaţia

$$x^2 - ax + a = 0$$

cu rădăcinile x_1, x_2. Să se formeze ecuaţia de gradul al 2-lea cu rădăcinile

$$y_1 = \frac{x_2}{a + x_1^2}, \quad y_2 = \frac{x_1}{a + x_2^2},$$

a fiind cunoscut.

CHESTIUNI DE ORAL

I.

Să se studieze variaţia funcţiei

$$y = \frac{(1-x)^3}{x^2}$$

şi să se reprezinte graficul corespunzător.

II.

Să se afle limita pentru $x = \frac{\pi}{3}$ a expresiei

$$E = \frac{2(x - \frac{\pi}{3}) + \operatorname{cotg} x \sin(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2\cos x}.$$

III.

Să se rezolve ecuaţia

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & a^2 & b^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 \end{vmatrix} = 0.$$

IV.

1°. Să se determine a astfel ca derivata polinomului

$$P(x) = x^4 + x^3 - 4a^3 x^2 + x + 1$$

să se anuleze pentru $x = 1$.

2°. Inlocuind pe a cu valoarea găsită, să se rezolve apoi ecuaţia

$$P(x) = 0$$

V.

Dintre toate triunghiurile isoscele înscrise într'un cerc de rază dată R, care este acela a cărui suprafaţă este maximă? (Se va lua ca variabilă distanţa de la centrul cercului la baza triunghiului isoscel).

GEOMETRIE.

I.

Tangenta într'un punct variabil M la un cerc de diametru $AB = 2R$ taie tangenta în A în punctul C.

1°. Să se afle locurile punctelor de întâlnire ale lui BC cu raza OM şi coarda AM.

2. Să se afle locurile punctelor unde paralela CD la AB taie dreptele AM şi MO.

3. Se ia pe BM punctul I, astfel ca $AI = BI$ care se uneşte cu A; să se afle locurile punctelor unde AI taie dreptele OM, OC, BC şi CD.

II.

Să se construiască un triunghiu ABC, ştiind că unghiul A este constant, latura BC este constantă ca mărime şi direcţie, vârful A se află pe un cerc dat, vârful B se află pe alt cerc dat, iar vârful C pe o dreaptă dată. Discuţie.

III.

Se dau două cercuri neegale de centre O_1, O_2 şi de raze R_1, R_2 situate în plane diferite. Se poate duce o sferă prin aceste cercuri? Să se determine condiţia de posibilitate şi în caz afirmativ să se determine centrul şi raza sferei.

CHESTIUNI DE ORAL

I.

Se cere locul punctelor astfel ca raportul distanţelor la un punct fix şi la o dreaptă fixă să fie constant. Să se precizeze natura locului.

II.

Să se determine aria unei elipse în funcţie de axele sale, considerând-o ca proecţie a unui cerc pe un plan înclinat faţă de planul elipsei.

III.

Să se construiască un triunghiu ABC cunoscând vârfurile B, C şi baricentrul G (punctul de întâlnire a medianelor).

IV.

Un segment de dreaptă AB este impărţit în acelaş raport k de punctele M, N. In ce raport este împărţit acelaşi segment de către mijlocul O a lui MN? Pe cercul descris pe MN ca diametru se ia un punct variabil R: Să se arate că $RA : RB = k$, oricare ar fi poziţia lui R pe cerc.

V.

Să se ducă o dreaptă D, care să întâlnească trei drepte date D_1, D_2, D_3 nesituate în acelaşi plan două câte două. Câte drepte de acest fel există?

VI.

Se dau trei plane arbitrate în spaţiu: când ele se întâlnesc în acelaş punct?

TRIGONOMETRIE.

I.

Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a \\ \operatorname{tg}(x + y) = b \end{cases}$$

şi să se discute rezultatul.

II.

Pe marginea unui râu se măsoară o distanţă AB de lungimea c.

Pe malul opus se văd din A şi B trei puncte distincte C, E şi D sub unghiurile $\alpha_1, \alpha_2 \alpha_3$ din A şi $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ din B

$$\alpha_1 = \sphericalangle CAB, \quad \alpha_2 = \sphericalangle EAB, \quad \alpha_3 = \sphericalangle DAB,$$
$$\beta_1 = \sphericalangle ABC, \quad \beta_2 = \sphericalangle ABE, \quad \beta_3 = \sphericalangle ABD.$$

Se cere: 1°. Distanţa CD. 2°. Lungimea perpendicularei duse din E pe CD.

III.

Să se rezolve un triunghiu oarecare ABC, fiind cunoscute: unghiul A, lungimea b a bisectoarei duse din vârful A şi unghiul γ pe care îl face înălţimea dusă din B cu mediana dusă din C. Să se calculeze suprafaţa acestui triunghiu. Să se determine valoarea lui γ (variabil) pentru care suprafaţa triunghiului este maximă.

CHESTIUNI DE ORAL

I.

Să se stabilească identităţile

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} \cdot \frac{\cos x}{1+\cos x}, \quad \frac{\cos\alpha + \cos 3\alpha}{\sin 3\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha,$$

II.

Să se facă calculabile prin logaritmi expresiile

$$1 + \sin\alpha, \quad \frac{\sin\alpha + \cos\beta}{\cos\alpha - \sin\beta}.$$

III.

Să se rezolve ecuaţiile:

$$a\sin x + b\cos x = c, \quad \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0.$$

IV.

Intr'un triunghiu dreptunghic se cunoaşte perimetrul $2p$ şi raza cercului înscris r.

Se cere: 1°. Să se rezolve triunghiul. 2°. Să se discute valorile lui p şi r.

V.

Să se determine suprafaţa unui patrulater oarecare în funcţie de diagonalele lui şi unghiul pe care îl formează între ele.

VI.

Să se rezolve un triunghiu oarecare fiind date perimetrul $2p$, raza cercului circumscris şi raza cercului înscris.

FIZICĂ.

I.

Din vârful unui turn înalt de 300 metri se lasă să cadă o bilă de plumb. In aceleaş timp de la baza turnului se aruncă în sus pe verticală o altă bilă de plumb. Se cere: 1°. Care trebue să fie viteza iniţială v, a ultimei bile pentru ca cele două bile să se întâlnească la mijlocul drumului (la înălţimea de 150 metri). 2°. La ce înălţime maximă se va urca ultima bilă?

II.

Un vas în formă de cub cu latura de 20 cm. este aşezat pe un plan orizontal. Fie ABCD o secţiune dreaptă a cubului. Un observator se aşează astfel ca raza sa vizuală atingând marginea superioară A a vasului să ajungă la muchea opusă C. In mijlocul M al bazei şi în planul vertical trecând prin ochiu se găseşte un obiect luminos (un mic bec electric aprins). Se cere ce înălţimea de un lichid de indice de refracţie $\frac{\sqrt{10}}{2}$ trebue să vărsăm în vas pentru ca ochiul să zărească punctul luminos M după direcţia OC

III.

Câte elemente *Daniel* de forţă electromotrice 1,06 volţi şi de rezistenţă interioară $r = o$*hmi*, fiecare element, trebuie să asociem pentru a obţine echivalenţa unui dinamo de forţă electromotrice 310 volţi şi de rezistenţă interioară 20 ohmi? (Se va considera un număr întreg de elemente cu aproximaţiune în plus).

CHESTIUNI DE ORAL

I.

Ce forţă în kg. e necesară pentru a separa emisferele de *Magdeburg* când se face în ele un vid de 5 mm/mercur? Date: Diametrul cercului mare al emisferei $d = 10$ cm., presiunea exterioară 76 cm. mercur, densitatea mercurului 13,6.

II.

Să se ilustreze principiul acţiunei şi reacţiunei a lui *Newton* în cazul unui corp cufundat într'un lichid. (Principiul lui *Archimede*). A se da rezultatul schematic.

III.

Principiul sifonării unui lichid şi explicaţia lui.

IV.

Care este deosebirea fundamentală între un gaz şi o vapoare? Aerul poate devine vapoare şi apa poate deveni gaz?

V.

Câte calorii trebuiesc date la 58 grame apă la temperatura de 3°. C, pentru a trece în vapori? (Căldura de vaporizare a apei este 530 calorii mici).

VI.

Care este diametrul imaginei soarelui formată de o oglindă sferică concavă de 2 m. rază, având axul principal dirijat către centrul soarelui? Diametrul aparent al soarelui (unghiul sub care se vede acesta din centrul de curbură al oglinzii) aste de 32′. Se vor confunda tangentele cu arcele respective).

VII.

De ce factori fizici depinde viteza sunetului într'un mediu? Se poate deduce apriori variaţia acestei viteze cu temperatura mediului?

VIII.

Ce este potenţialul electric al unui conductor şi cum se invederează el în mod experimental?

IX.

Cum se pot identifica, departe de orice laborator, două baghete, una magnetică din oţel şi alta magnetică din fier, identice ca formă şi mărime?

X.

Ce semnificaţie are forţa electromotrice a unui dinam, sau a unui element galvanic? Să se aplice legea lui *Ohm* la un circuit (conductor) de rezistenţă exterioară R ohmi închis pe un element galvanic de rezistenţă interioară r ohmi şi de forţă electromotrice E volţi.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul LII, No 3, Noembrie 1946. Asupra triunghiului pseudo-isoscel, de *H M. Bodnărescu*. Un extras din aritmetica lui *Caspar Schott* tipărită la Cluj, de *Victor Marian*. Raport pentru decernarea premiului *V. Conta*, de Ing. *Alex Bunescu*, Prof. *Petre Sergescu*, Prof. *Şerban Ţiţeica*. Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. *Boletin Matematico*, Anul XIX, No. 5, Iulie 1946. Arce, coarde, tangente. Probleme propuse.

3. *A. Gloden*. Une nouveau théorème sur les multigrades.

4. *M. Haimovici*. Sur les systèmes homographiques de courbes dans l'espace à *n* dimensions. (Mathematica, Vol. XXII, 1946).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 613. — *In cercul* O *se duce diametrul* AB *şi coardele* AC *şi* BD, *care se taie în* E. *Se duce cercul* CED *cu centrul în* O'. OO' *taie cercurile* O *şi* O' *în* F *şi* G *şi pe* DC *în* H. O'E *taie pe* AB *în* I. *Să se arate că:*

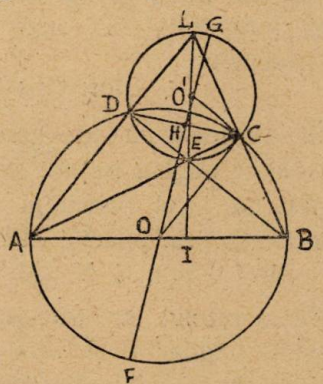
1°. EI *este perpendiculară pe* AB.

2°. *Pentagonul* OICO'D *este inscriptibil.*

3°. $O'H \cdot \overline{OF}^2 = OH \cdot \overline{O'G}^2$.

LEPADATU I. MICLEA

Soluţie. 1°. Fie L intersecţia lui AD cu BC. Unghiurile ADB şi ACB fiind înscrise într'un semicerc de diametru AB sunt drepte. Deci AC, BD şi LE sunt înălţimi în triunghiul ALB şi LE este perpendiculară pe AB. Patrulaterul DECL



având unghiurile din D şi C drepte, este inscriptibil în cercul de diametru LE şi are centrul O' în mijlocul lui LE. Deci EO', care se confundă ca direcţie cu înălţimea LE a triunghiului ALB, este perpendiculară pe AB.

2°. Punctele O, I, C, O', D se ştie că sunt pe cercul celor 9 puncte ale triunghiului ABL.

Se poate arăta şi independent de această teoremă, că unghiurile OCO', ODO' sunt drepte. In triunghiul dreptunghic LCE dreapta O'C este mediană, deci

$$O'C = O'E \quad \therefore \quad \sphericalangle O'CE = \sphericalangle CEO' = \sphericalangle IEA$$

ceiace înseamnă că $\sphericalangle O'CE$ este complimentar cu

$$\sphericalangle CAO = \sphericalangle OCA.$$

Deci $OC \perp O'C$. La fel se arată că $OD' \perp O'D$ şi deci patrulaterul ODO'C este înscris în cercul de diametru OO', dar acest cerc trece şi prin punctul I, proecţia lui O' pe AB.

3°. Fie H intersecţia lui OO' cu DC. Se ştie că coarda DC, comună cercurilor O şi O', este perpendiculară pe linia centrelor OO'. In triunghiul dreptunghic ODO' avem

$$\overline{DO}^2 = \overline{OO'} \cdot \overline{OH} \quad \text{şi} \quad \overline{DO'}^2 = \overline{OO'} \cdot \overline{O'H}.$$

Impărţind, una prin alta, aceste egalităţi şi observând că

$$OD = OF \quad \text{şi} \quad O'D = O'G$$

ca raze ale cercurilor O şi O', găsim

$$O'H \cdot \overline{OF}^2 = OH \cdot \overline{O'G}^2.$$

Se vede din această demonstraţie că punctul G sau F poate fi una *oarecare* din intersecţiile lui OO' cu cercul O' sau O.

Bune soluţii analoage, s'au primit dela d-nii: *Albeaţă N. Emil, Aldea N., Arsene Alexandru, Atanasescu V. Dumitru, Beşchea G. Nicolae, Coşniţă Cezar, Costăchescu V. Constantin, Drăguţ G. Vasile, Dumitrescu I. Eug., Floareş I. Mircea, Gârneaţă E., Gheorghiu Al., Ghişoiu Petre, Ignat M. Paul, Ionescu Gh. Virgil, Mihăileanu N. N., Mihaiu Gh., Panaite N. Teodor, Pârvulescu M. Ştefan, Râmniceanu I. Cristian, Roman I. I., Savin I., Stan I. Aurelian, Şteblea Şt. Ştefan, Vâlceanu N. Justin şi Vonica C. Ioan.*

Problema a fost propusă în numărul de la 15 Februarie 1927, ceia ce explică numele profesorilor, inginerilor, militarilor în grad superior, printre rezolvitorii ei.

Punctele 1° şi 2° ale problemei sunt cuprinse şi în problema 497, rezolvată la pag. 137 Vol VI.

Gh. B.

Problema 2070. — *Fie* AA' *înălţimea triunghiului* ABC *cu ortocentrul în* H. *Se notează cu* A_1 *diametralul opus lui* A *în cercul* (O) *circumscris triunghiului* ABC *şi cu* P *mijlocul lui* OA_1. *Să se demonstreze când* A_1A' *este paralelă cu* PH?

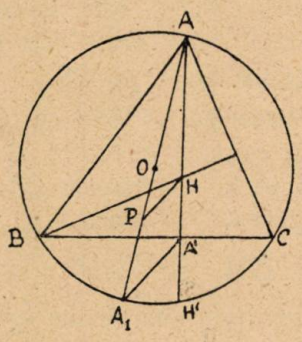
G-L GH. BUICLIU

Soluţie. Dacă A_1A', PH sunt paralele, atunci triunghiurile A_1AA' şi PAH dau

$$\frac{AH}{HA'}=\frac{AP}{PA_1}=\frac{\frac{3R}{2}}{\frac{R}{2}}=3.$$

R fiind raza cercului (O). Deci condiţia cerută este

1) $$AH=3HA'.$$



Dacă se notează cu H' intersecţia lui (O) cu AH se ştie că

$$HA'=A'H'=\frac{HH'}{2}$$

aşa că condiţia cerută de enunţ se mai poate scrie şi sub forma

$$2AH=3HH'.$$

A dat această soluţie, d-nii: *Bogza Mihai* (Lic. Deva), *Constantinescu N. Ilie* (Lic. „Bălcescu") Brăila); *Pălăceanu D. V.* (Lic. Militar Timişoara) *Tincu C-tin* (Col. Loga), Timişoara şi *Wegener N. Eugen* (Bucureşti) au stabilit relaţiuni trigonometrice în locul relaţiei (1)

PROBLEME PROPUSE

2472. Să se găsească un număr de 9 cifre de forma $abcdefgha$ ştiind că el este produsul lui 4 cu un număr de 8 cifre, toate diferite între ele. Literile $a, b, c, \ldots, h$ reprezintă cifre diferite între ele.

G-L. GH. BUICLIU

2473. — Dacă n este număr prim, să se arate că expresia

$$E=n^{82}-n^{60}-n^{22}+1$$

se divide cu 1403.

C-PT. G. P. BOERESCU

2474. — Fie $f(x)=\frac{2b}{x}(a\sqrt{x-b^2}+b\sqrt{x-a^2})$.

Să se arate că avem

$$f(x_1)=d,$$

dacă

$$x_1=\left(\frac{a^2-c^2+d^2}{2d}\right)^2+c^2,$$

$$4b^2=(a-c)^2+d^2.$$

MARIA NEUMANN

2475. — Să se determine λ astfel ca între rădăcinele ecuaţiei

$$x^4-4x^3+3\lambda x^2+2x-2\lambda^2=0$$

să existe relaţia

$$\sum_1^4 \operatorname{arc\,tg}\, x_i=\frac{\pi}{2}.$$

Luând apoi valoarea întreagă a lui λ, să se rezolve ecuaţia ştiind că admite rădăcina $x_1=\lambda+\sqrt{3}$.

IOAN I. NOVAC

2476. — Să se arate că

$$\frac{\operatorname{arc\,tg}\, i\frac{\varphi(x)-1}{\varphi(x)+1}-\operatorname{arc\,tg}\, i\frac{\varphi(x)-x^2}{\varphi(x)+x^2}}{\operatorname{arc\,tg}\, i\frac{x^3-1}{x^3+1}-\operatorname{arc\,tg}\, i\frac{1-x}{1+x}}=\frac{1}{2}.$$

MIHAI GIURCONIU

2477. Să se demonstreze că, dacă împărţim laturile unui triunghiu oarecare ABC, prin punctele A', B', C' în acelaşi senz, şi în acelaşi raport, atunci dreptele AA', BB', CC' sunt întotdeauna laturile unui triunghiu.

ION DILI SCHILERU

2478. — Se consideră un triunghiu BAC şi un punct M. De ce unghiu trebuie să se rotească triunghiul ABC în jurul punctului A, astfel ca latura BC să treacă prin punctul M?

LT. C-DOR C V. COSTACHESCU

2479. — Să se rezolve un triunghiu oarecare ABC, cunoscând unghiul B şi razele r_1, r_2 ale cercurilor înscrise în triunghiurile ODB şi ODC, O fiind centrul cercului înscris în triunghiul ABC, iar OD fiind perpendiculara din O pe BC. Discuţie.

Să se construiască apoi triunghiul ABC cu datele din enunţ.

Aplicaţie: $B=60^0$, $r_1=5$, $r_2=4$.

V. ALACI

TABLOU

de candidaţii reuşiţi la examenul de admitere din 5 Noemvrie 1946, la
FACULTATEA ELECTROMECANICĂ
POLITEHNICA TIMIŞOARA.

1. **Novac I. Ioan** (Lic. Nicolae Bălcescu, Brăila).
2. **Puşcaş M Silviu** (Lic. Fraţii Buzeşti, Craiova).
3. **Manolescu V. Gh.** (Lic, Nicolae Bălcescu, Brăila).
4. **Popa Gheorghe** (Lic. Dr. Meşota, Braşov).
5. **Leinderfer Alfred** (Lic. Piarist, Timişoara).
6. **Tănăsoiu Titus** (Lic. Moise Nicoară, Arad).
7. **Budişan Nicolae** (Lic Moise Nicoară, Arad).
8. **Lebovics Ervin** (Lic. Izraelit, Timişoara).
9. **Iacob Venus** (Col. Naţ. C. D. Loga, Timişoara).
10. **Stănescu St. Gh.** (Lic Radu Greceanu, Slatina).
11. **Costin Ovidiu** (Lic. Regele Ferdinand, Turda).
12. **Crăciunescu Victor** (Col. C. D Loga, Timişoara).
13. **Kriz Ferdinand** (Col. C. D. Loga, Timişoara).
14. **Vorobiev Mihail** (Lic. Mihai Viteazul, Alba Iulia).
15. **Lucaciu Iosif** (Lic. C. Brediceanu, Lugoj).
16. **Stan Petru** (Col. Naţ. C. D Loga, Timişoara).
17. **Gordan G. Tiberiu,** (Col C. D. Loga, Timişoara).
18. **Ioncu Simion** (Lic. Papiu Ilariu, Tg.-Mureş)
19. **Fulga N. Eugeniu** (Col. Naţ. Carol I, Craiova).
20. **Demian Traian** (Lic. Titu Maiorescu, Aiud).
21. **Hochmeister Günter** (Lic. Gheorghe Lazăr, Sibiu)
22. **Teiuşanu Horia** (Lic. Samuil Vulcan, Beiuş).
23. **Teodorescu I. Gheorghe** (Lic V. Alexandri, Galaţi).
24. **Olaru Cornel** (Lic. Gheorghe Lazăr, Sibiu).
25. **Pop I. Eugen** (Lic. de Aplicaţie S. P. U., Cluj).
26. **Teodoraşe I. Vasile** (Lic V. Alexandri Galaţi)
27. **Coste M. Florian** (Lic. Samuil Vulcan, Beiuş).
28. **Poeniţă Gh. Gheorghe** (Lic. Gh Lazăr, Sibiu).
29. **Teodorescu A. Alex.** (Lic M. Viteazul, Timişoara).
30. **Bârzescu C. Alex** (Col. C. D. Loga, Timişoara).
31. **Tupiţă Gheorghe** (Col C. D. Loga, Timişoara).
32. **Belgun Gh. Ioan** (Lic Fraţii Buzeşti, Craiova).
33. **Călugăru Aurelian.** (Lic. Tudor Vladim., Tg.-Jiu).
34. **Stoian Gh. Leonida** (Lic Mihai Emin., Satu-Mare).
35. **Bora Gheorghe** (Lic Andrei Şaguna, Braşov.)
36. **Kremer Ştefan** (Lic. Evanghelic, Bistriţa)
37. **Poclitaru Radu** (Lic. Gheorghe Lazăr, Sibiu).
38. **Beşliu I. Gh. Nicolae** (Lic. B. P. Haşdeu, Buzău).
39. **Bcboc O. Octavian** (Lic Andrei Şaguna, Braşov).
40. **Bozian N. Alexandru** (Lic M. Viteazul, Timişoara).
41. **Ionescu Gh. V. Eug.** (Lic. D. Golescu, C-lung-M.).
42. **Oană I. Zaharie** (Lic. Gheorghe Lazăr, Sibiu).
43. **Sava P. Boris** (Lic. Regele Ferdinand, R.-Sărat).
44. **Stern Emeric** (Lic. Industrial, Timişoara)
45. **Bobocea S V. Alex.** (Lic. Nicolae Bălcescu, Brăila).
46. **Brădăţeanu Victor** (Lic. C. Brediceanu, Lugoj).
47. **Gheorghe St V. V.** (Lic. Mil. D. A. Sturza, Craiova).
48. **Junger S. Arnold** (Lic Conf. Iz., Timişoara).
49. **Nicolae I. Dumitru** (Lic Bălcescu, Brăila).
50. **Petranu N. Gheorghe** (Lic Ioniţă Asan, Caracal).
51. **Ifrim I. Alfonz** (Lic. Traian, T.-Severin).
52. **Justian-Schmidt Eric** (Lic. Regele Ferd., Turda)
53. **Arbanaş N. Mircea** (Lic. Nicu Gane, Fălticeni).
54. **Dănişoc C. Nicolae** (Lic. Teoretic, Găeşti).
55. **Pop Mircea** (Lic Gheorghe Lazăr, Sibiu).
56. **Crăciun Georgeta** (Lic. Monahal Acoperământul Maicii Domnului, Bistriţa Vâlcea).
57. **Muscalu Gr. Alexandru** (Lic. Traian, T.-Severin).
58. **Băneşiu Caius** (Lic Moise Nicoară, Arad).
59. **Belu Gh. Petru** (Lic. Dimitrie A. Sturza, Tecuci).
60. **Ianacu F. Gh.** (Lic. Mircea Cel Bătrân, Constanţa).
61. **Iordache A. Şerban** (Lic. Gh. Sincai, Bucureşti).
62. **Ceauşu Marta** (Lic. Regina Elisabeta, Craiova).
63. **Ghinculov Valentin** (Lic. de Aplic. S P. U., Cluj).
64. **Moldovan V. Simion** (Lic. Regele Ferd. Turda).
65. **Munteanu Nicolae** (Lic. Andrei Şaguna, Braşov).
66. **Neagu Dumitru** (Lic. Emil Gojdu, Oradea).
67. **Barac D. Mihail** (Lic. Nicolae Bălcescu, Brăila).
68. **Constantinescu C. Gh.,** (Şc. Sup. de Meserii Arsenalul Armatei, Bucureşti).
69. **Korch Augustin** (Lic. Rom. Catolic, Tg.-Mureş).
70. **Mocanu I. Radu** (Lic Vasile Alexandri, Galaţi).
71. **Spulber S Nicolae** (Lic. Teoretic, Tecuci).
72. **Chiţu M. Ioan** (Lic. S-ţii Petru şi Pavel, Ploeşti).
73. **Donos T. Anatolie** (Lic No. 2, Cluj).
74. **Ghizdavu Victor** (Lic. S-tul Vasile Cel Mare, Blaj).
75. **Greavu I. Marin** (Lic. T. Vladimirescu, Tg.-Jiu).
76. **Irimescu Gheorghe** (Col. C. D. Loga, Timişoara).
77. **Kremmer I. Iosif** (Lic de Stat. Satu-Mare).
78. **Niţu I. Vasile** (Lic. Nicolae Gane, Fălticeni).
79. **Olariu Octavian** (Col. C D. Loga, Timişoara).
80. **Stiaszny L. Oscar** (Lic Moise Nicoară, Arad).
81. **Barbălată Constantin** (Lic. Regele Ferd., Craiova).
82. **Gross Ernest** (Lic. Emanoil Gojdu, Oradea).
83. **Pătrănoi I J. Florian** (Lic. Nic. Bălcescu, Brăila).
84. **Teodorescu D Virgil** (Lic. Unirea, Focşani).
85. **Ciocan Iulian** (Lic. Avram Iancu, Brad).
86. **Ilieş Ştefan** (Lic Sf. Petru şi Pavel, Ploeşti).
87. **Negali S. Vitalie** (Lic. Mihai Viteazul, Timişoara).
88. **Tănase M. Marin** (Lic. Sft. Haralambie, T.-Măg.).
89. **Madgearu Hermin,** (Col C. D. Loga, Timişoara).
90. **Câmpeanu Augustin** (Lic. Aurel Vlaicu, Orăştie).
91. **Curea Iosif** (Col. C D. Loga, Timişoara).
92. **Drănceanu Aurel** (Lic. Industrial, Arad).
93. **Nemţu Virgil** (Lic. Mihai Viteazul, Alva-Iulia).
94. **Popescu Gheorghe** (Lic. D. A. Sturza, Craiova).
95. **Steinberger Adrian** (Lic. Mihai Viteazul, Alba-Iulia).
96. **Bute C. Ionel** (Lic B. P. Haşdeu, Buzău).
97. **Mărcuţiu P. Silviu** (Lic Gheorghe Barţiu, Cluj).
98. **Mihai T. Virgil** (Lic. Industrial, Galaţi)
99. **Bălulescu I Pompiliu** (Lic. Traian, T.-Severin).
100. **Popescu P. V.** (Lic Enăchiţă Văcărescu, T-goviştei).
101. **Mihăescu A. Mircea** (Col. Naţ. C. D. Loga, T-şoara).
102. **Udoi Viorel** (Col. Naţ. C. D. Loga, Timişoara).

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Adomnichi Vasile (2456, 2458, 2460). **Balanişeu Chirică** (2401, 2409, 2430, 2431, 2458); **Baranga Mihai** (2456); **Baz Marcel** (2456, 2458, 2460); **Bobocea Alexandru** (2316, 2338, 2401, 2405, 2406, 2407, 2416, 2419, 2423, 2427, 2429, 2438, 2454, va trimite din nou problemele scrise fiecare pe foi separate); **Bogza Mihai** (2387, 2435, 2437, 2452); **Chiriac C.** (2215, 2248, 2309, 2320, 2330, 2351, 2362, 2388, 2400, 2401, 2403, 2405, 2406, 2409, 2413, 2417, 2418, 2424, 2440, 2446, 2447); **Chiriac Ivănel** (2416, 2419, 2437); **Cocoş Gh.** (2452, 2456, 2458, 2467, 2469); **Comşa Corneliu** (2456, 2458, 2460); **Constantinescu Gh.** (2466, 2458); **Constantinescu Paul** (2405, 2411, 2429, 2431, 2435, 2439, 2452); **Corduneanu C tin** (P; 2118, 2404, 2408, 2413, 2420, 2427, 2428, 2429, 2430, 2436, 2439, 2443, 2447, 2448, 2450, 2451, 2452, 2453, 2454); **Crăcea D-tru** (P; 2418, 2437, 2438); **Crăciun Silviu** (2456); **Cucu Emil** (2456, 2469); **Dumitrescu Adrian** (2456, 2458); **Enache Ion** (2450); **Făgărăşeanu Ioan** (2456, 2458, 2460); **Gâlca Horaţiu** (2456, 2458, 2460); **Gheorghian Leonid** (2458, 2460); **Dăscălescu M. Vlad** (2427, 2428, 2429, 2430); **Diaconescu Ioan** (2456, 2469); **Dirconu Vasile** (2404, 2416, 2418, 2419, 2448, 2450, 2452, 2454); **Dobin Aurel** (2456); **Giurconiu Mihai** (N; P; 1640, 1726, 1728, 1737, 1921, 1989, 2033, 2070, 2087, 2094, 2096, 2121, 2134, 2155, 2193, 2220, 2225, 2249, 2251, 2270 2291, 2308, 2362 2372, 2375, 2379, 2399 2407, 2409, 2426, 2427, 2429, 2430, 2431, 2432, 2433; 2436, 2437, 2439, 2440, 2444, 2450, 2456, 2459, 2462 2469); **Guttman Tiberiu** (2435 2450, 2452); **Haret Radu** (2362, 2409, 2413, 2415, 2416, 2427, 2431, 2435, 2438 2450, 2455, 2459, 2462, 2469); **Iacob Eugen** (P); **Janca Spiridon** (2456, 2458, 2460); **Ioncu Simion** (2390, 2413, 2429, 2450, 2458); **Ionescu Corneliu** (2456, 2458, 2460); **Lebovics Hermann** (2403, 2404, 2405, 2406, 2409); **Man Aurel** (2456, 2458, 2460, 2467); **Man Octavian** (2466, 2468, 2469); **Manta Nicolae** (2458); **Marinescu D.** (2405, 2407, 2411, 2416, 2429, 2444, 2452, 2454); **Măncescu Ion** (2411, 2418, 2419, 2420, 2427, 2428, 2429, 2430, 2438, 2440, 2442, 2446, 2448, 2452, 2454, 2456, 2462); **Moroianu Aurel** (2469); **Munteanu Ioan** (P; 2404, 2408, 2413, 2418, 2419, 2420, 2427, 2428, 2429, 2430, 2431, 2435, 2443, 2448, 2450, 2451, 2452, 2453, 2454); **Neguţ Ion** (P; 2452); **Neagu Mihai** (2452, 2469); **Negru Savu** (2456, 2467); **Niţescu Paul** (2467); **Novac I.** (N; P.); **Pană Romulus** (2467); **Pănoiu Nicolae** (2403, 2419); **Pârvu Ioan** (2456, 2458, 2460); **Pavel Nicolae** (2456, 2458); **Popa Vasile** (P; 2118, 2362, 2418, 2435, 2436, 2450, 2453, 2454); **Rădulescu Valeriu** (2456, 2458, 2460); **Răuţu Titus** (2456, 2458, 2460); **Rogoz Teodor** (2467); **Roman C-tin** (2331, 2338, 2371, 2450); **Romul Radu** (2357, 2390, 2401, 2420, 2450, 2452, 2454); **Scurtu Gh.** (2456, 2458); **Simionescu G.** (2456); **Stanciu Petru** (2456, 2458, 2460); **Stanciu Valeriu** (P.); **Stancu Nicolae** (2456, 2458, 2460); **Stănilă Gh.** (2413, 2416, 2419, 2424, 2435, 2437, 2454); **Ştefan Ilie** (2456, 2458, 2460); **Ştefănescu Sofronie** (P; 2452, 2456, 2458, 2467, 2469); **Szekely G.** (2456); **Tarola Alexandru** (2456, 2458, 2460); **Tătaru Sever** (2456, 2458); **Tatomir** (2458); **Teiuşame Horia** (P; 2405, 2406 2408, 2409, 2413, 2427, 2435, 2452, 2460, 2466, 2469); **Teodorescu Petre** (P; 2373, 2466, 2469); **Trache D.** (2456); **Trifu Ovidiu** (2467); **Turbuţiu Gh.** (2406, 2409). **Ţârlie Ioachim** (2469); **Udrea Marin** (2456, 2458, 2460); **Vasile Florea** (2458); **Velica Mircea** (2467); **Voinea Stelian** (2456, 2458)

INFORMAŢIUNI

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, pentru a fi luate în consideraţie, trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Rugăm pe corespondenţii noştrii ca problemele propuse să fie însoţite de soluţiile corespunzătoare.

Legându-se colecţiileR. M. T., anii II-XXV, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 1200 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II—XXV, cu preţul de lei 8000 volumul şi se trimet la cerere.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.